Université de Nantes
U.F.R. de Lettres et Sciences Humaines

Année 2000

Éléments de logique aléthico-déontique

Thèse
pour obtenir le grade de
Docteur en Philosophie
de l'Université de Nantes

présentée et soutenue publiquement par

Frédéric SART

le vendredi 14 janvier 2000

Directeur de thèse :

M. Patrice BAILHACHE

Jury :

M. Patrice BAILHACHE
M. Marcel CRABBÉ
M. Paul GOCHET
M. Alain LECOMTE

Université de Nantes
U.F.R. de Lettres et Sciences Humaines

Année 2000

Éléments de logique aléthico-déontique

Thèse
pour obtenir le grade de
Docteur en Philosophie
de l'Université de Nantes

présentée et soutenue publiquement par

Frédéric SART

le vendredi 14 janvier 2000

Directeur de thèse :

M. Patrice BAILHACHE

Jury :

M. Patrice BAILHACHE
M. Marcel CRABBÉ
M. Paul GOCHET
M. Alain LECOMTE

Merci à toutes celles et à tous ceux qui ont cheminé avec nous pendant ces années de thèse.

Nous pensons particulièrement au Professeur Paul Gochet, qui nous a suivi dès le début, et au Professeur Patrice Bailhache, notre directeur de thèse, qui a tout mis en oeuvre pour que ce travail aboutisse.

F. S.

Nantes, le 3 octobre 1999.

Table des matières

Introduction

1. But et méthode

> "J'ai formé une méthode, par laquelle il me semble que j'ai moyen d'augmenter par degrés ma connaissance et de l'élever peu à peu au plus haut point auquel la médiocrité de mon esprit et la courte durée de ma vie lui pourront permettre d'atteindre."
>
> DESCARTES, *Discours de la méthode*

Repartant des *Recherches* de Frege, nous posons que la logique est l'*étude des propositions*, c'est-à-dire l'étude de ce qui est soit vrai soit faux.

Le but d'une étude étant de comprendre les objets étudiés, celui de la logique est de comprendre les propositions.

Or comprendre, c'est à nos yeux *réduire* au sens A du *Vocabulaire* de Lalande.

> "**RÉDUIRE, A.** Transformer une donnée, ou un énoncé pour les amener, soit à une forme logiquement plus intéressante ou plus utilisable ; soit à une forme plus condensée, plus simple, ou plus élémentaire."

Il ajoute dans la critique :

> "Lorsqu'on parle de *réduire* un fait à certains éléments, il s'y mêle tantôt l'idée d'une restriction et d'un appauvrissement regrettables, qui en laissent perdre les caractères essentiels, tantôt au contraire l'idée d'une simplification utile et légitime, qui dégage ce qu'il y a en lui de plus important."

Cela étant, nous fondons notre étude des propositions sur une *méthode*. Celle-ci est formée de deux règles qui s'enchaînent :

Première règle :

Formaliser, c'est-à-dire réduire la logique à une logique formelle.

En d'autres termes, il s'agit dans un cadre propositionnel *fini* :

(1) De définir un concept de *configuration* et sur ce, de *fonction de vérité* (*sur l'espace* - fini - *des configurations*).
(2) De relier ce second concept à celui de proposition en admettant que chaque fonction de vérité exprime une proposition.

Seconde règle :

Symboliser, c'est-à-dire transformer cette logique formelle en logique symbolique.

En d'autres termes, il s'agit alors :

(1) De définir un concept de *formule*.
(2) De relier ce concept à celui de fonction de vérité en définissant par récurrence une *sémantique*, à savoir une fonction telle qu'à toute formule correspond une fonction de vérité.

Une logique fondée sur cette méthode comprendra donc une *double représentation* : la première sera formelle ; la seconde, symbolique.

2. Application de la méthode

> "La question est de savoir si toute composition de pensées admet une telle construction. En ce qui concerne les mathématiques, je suis convaincu qu'on n'y rencontrera aucune composition qui échappe à cette analyse. Quant à la physique, à la chimie, à l'astronomie, il en irait difficilement autrement. Mais les propositions de finalité demandent quelque prudence et semblent exiger une enquête plus exacte. Aussi laisserai-je cette question sans réponse."
>
> FREGE, *Recherches logiques*

Voici la thèse que nous défendons :

La question déontique peut être résolue suivant la méthode présentée.

Notre logique aléthico-déontique est une preuve de cette thèse. Elle est divisée en deux sections : le cas d'une Autorité est d'abord exposé, puis celui d'un ensemble fini d'Autorité(s). Elle est préfigurée par notre logique aléthique, qui emprunte dans une certaine mesure au *Tractatus* de Wittgenstein.

Nos deux logiques, aléthique et aléthico-déontique, chacune suite cohérente d'énoncés précis, forment le texte proprement dit. Il est constitué d'exactement 100 énoncés : 51 définitions, 6 axiomes, 1 postulat et 42 théorèmes. Le postulat en est le *point culminant* : il croise le déontique avec l'aléthique de telle sorte que la méthode présentée peut être applicable à la question déontique.

∴

Première partie

LOGIQUE ALÉTHIQUE

1

De l'objet à la forme : Configuration aléthique et fonction de vérité

Les notions de vrai et de faux, en abrégé “le vrai” et “le faux”, sont sous-jacentes à notre logique aléthique qui commence par cette définition :

> **1.** *Définition*. **Proposition.**
>
> Ce qui est soit vrai soit faux.

Nous suivons en cela l'auteur des *Logische Untersuchungen* [*Recherches logiques*] (Frege), qui emploie le terme “pensée” [“Gedanke”] :

> “Ein Gedanke aber ist etwas, von dem gilt : wahr oder falsch, ein Drittes gibt es nicht.” ([9], p. 38)[1]

> **2.** *Axiome*.
>
> Pour tout nombre entier positif i, il existe au moins un ensemble I formé de i proposition(s).

Soit un tel ensemble *fini* N, formé de n proposition(s).

C'est dans ce cadre propositionnel que nous allons, suivant la méthode présentée dans l'introduction, procéder à la formalisation :

(1) Nous allons définir un concept de fonction de vérité.

(2) Nous relierons ce concept à celui de proposition en admettant que chaque fonction de vérité exprime une proposition.

Ce concept de fonction de vérité s'appuie sur celui de configuration aléthique de N, clé du chapitre.

[1] “Une pensée est ce dont on peut dire : vrai, faux, le tiers est exclu.” ([10], p. 216)

3. *Définition*. **Configuration aléthique de N.**

Fonction telle qu'à *chaque* élément de N correspond soit le vrai soit le faux.

Cette définition est *légitimée* par l'énoncé 1.

Cela étant, nous éclairons la définition 3 par le paragraphe qui lui correspond dans le *Tractatus*. Wittgenstein emploie le terme "tableau" ["Bild"] :

> "2.201 Das Bild bildet die Wirklichkeit ab, indem es eine Möglichkeit des Bestehens und Nichtbestehens von Sachverhalten darstellt." ([21], p. 16)[2]

4. *Théorème*. Le nombre des configurations aléthiques de N est *fini* : il en existe 2^n.

Lui correspondent dans le *Tractatus* les paragraphes 4.27 et 4.28 :

> "4.27 Bezüglich des Bestehens und Nichtbestehens von n Sachverhalten gibt es $K_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}$ Möglichkeiten [...]"
>
> "4.28 Diesen Kombinationen entsprechen ebenso viele Möglichkeiten der Wahrheit - und Falschheit - von n Elementarsätzen." ([21], p. 62)[3]

Démonstration.

L'ensemble N étant formé de n élément(s), il existe donc, par la définition 3, 2^n configurations aléthiques de N. ■

5. *Définition*. **L'espace aléthique E_0(N).**

La *totalité* des configurations aléthiques de N.

Nous allons illustrer cette définition. Plus précisément, nous allons figurer par autant de pictogrammes chacune des configurations aléthiques d'un ensemble formé de deux propositions.

Pour ce faire, imaginons une région où la journée :

(1) Soit le ciel est dégagé, soit il est couvert.

(2) Soit il fait chaud, soit il fait froid.

---

[2] "2.201 Le tableau représente la réalité en figurant une possibilité de l'existence et de la non-existence d'états de choses." (traduction personnelle)

[3] "4.27 En ce qui concerne l'existence et la non-existence de n états de choses il y a $K_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}$ possibilités [...]"

"4.28 À ces combinaisons correspondent autant de possibilités de la vérité - et de la fausseté - de n propositions élémentaires." ([22], p. 59)

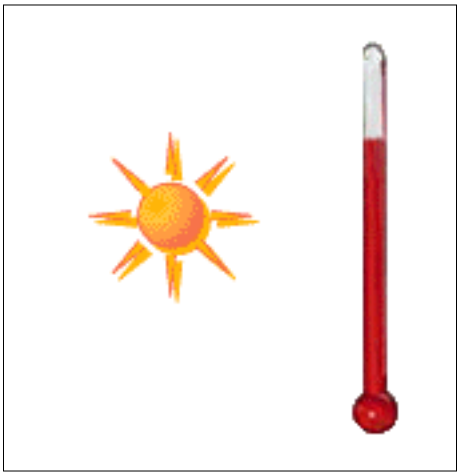
Sur ce, admettons que les deux phrases :

Le ciel est dégagé.
Il fait chaud.

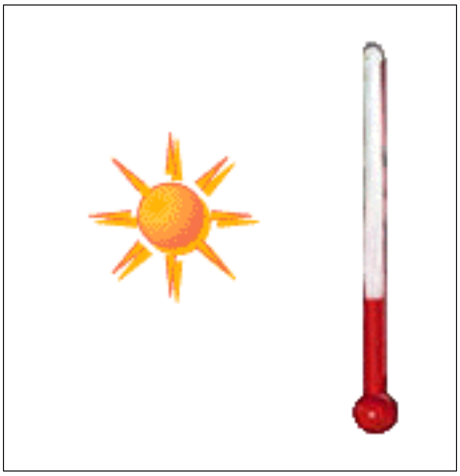
expriment respectivement deux propositions p et q.

Nous en inférons que les quatre pictogrammes ci-après figurent les quatre configurations aléthiques de {p, q}.

Expressions pictographiques des quatre configurations aléthiques de {p, q}.



Configuration α_1.



Configuration α_2.

Configuration α_3.

Configuration α_4.

Venons-en alors au concept de fonction de vérité sur $E_0(N)$.

6. *Définition*. **Fonction de vérité sur $E_0(N)$.**

Fonction telle qu'à *chaque* élément de $E_0(N)$ correspond soit le vrai soit le faux.

Nous éclairons cette définition par le paragraphe qui lui correspond dans le *Tractatus*. Wittgenstein emploie le terme "proposition" ["Satz"] :

> "4.4 Der Satz ist der Ausdruck der Übereinstimmung und Nichtübereinstimmung mit den Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze." ([21], p. 62)[4]

Il écrit encore au paragraphe 3.4 :

> "3.4 Der Satz bestimmt einen Ort im logischen Raum [...]" ([21], p. 34)[5]

Table d'une fonction de vérité f sur $E_0(\{p, q\})$.

Dans la colonne de gauche sont représentées les quatre configurations aléthiques de {p, q} et, à leur droite, la valeur qui leur correspond par la fonction de vérité f.
La notation "$\underline{p}$" ["$\overline{p}$"] signifie qu'à la proposition p correspond le vrai [le faux].
Le caractère "1" ["0"] désigne le vrai [le faux].

α	f
$\alpha_1 : \{\underline{p}, \underline{q}\}$	1
$\alpha_2 : \{\underline{p}, \overline{q}\}$	0
$\alpha_3 : \{\overline{p}, \underline{q}\}$	1
$\alpha_4 : \{\overline{p}, \overline{q}\}$	1

7. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité sur $E_0(N)$ est *fini* : il en existe $2^{(2^n)}$.

Lui correspond dans le *Tractatus* le paragraphe 4.42 :

> "4.42 Bezüglich der Übereinstimmung und Nichtübereinstimmung eines Satzes mit den Wahrheitsmöglichkeiten von n Elementarsätzen gibt es $\sum_{k=0}^{K_n} \binom{K_n}{k} = L_n$ Möglichkeiten." ([21], p. 64)[6]

---

4 "4.4 La proposition est l'expression de l'accord et du désaccord avec les possibilités de vérité des propositions élémentaires." ([22], p. 60)

5 "3.4 La proposition détermine un lieu dans l'espace logique [...]" ([22], p. 45)

6 "4.42 En ce qui concerne l'accord et le désaccord d'une proposition avec les possibilités de vérité de n propositions élémentaires il y a $\sum_{k=0}^{K_n} \binom{K_n}{k} = L_n$ possibilités." ([22], p. 60)

Démonstration.

Par le théorème 4, l'espace $E_0(N)$ est formé de 2^n éléments ; il existe donc, par la définition 6, $2^{(2^n)}$ fonctions de vérité sur $E_0(N)$. ■

8. *Définition*. **L'espace fonctionnel $\mathcal{E}_0$(N).**
La *totalité* des fonctions de vérité sur $E_0(N)$.

9. *Axiome*.

Chaque fonction de vérité sur $E_0(N)$ exprime une proposition.

Cet axiome *justifie* l'énoncé 6.

10. *Définition*. **L'extension d'une fonction de vérité f sur E_0(N).**

L'ensemble des configurations aléthiques de N auxquelles correspond le vrai par la fonction de vérité f.

Lui correspond dans le *Tractatus* le paragraphe 5.101 :

> "5.101 [...] Diejenigen Wahrheitsmöglichkeiten seiner Wahrheitsargumente, welche den Satz bewahrheiten, will ich seine Wahrheitsgründe nennen." ([21], p. 74)[7]

11. *Définition*. **La fonction de vérité tautologique sur E_0(N).**
La fonction de vérité sur $E_0(N)$ dont l'extension est l'espace $E_0(N)$.

12. *Définition*. **La fonction de vérité contradictoire sur E_0(N).**
La fonction de vérité sur $E_0(N)$ dont l'extension est l'ensemble vide.

Leur correspond dans le *Tractatus* le paragraphe 4.46 :

> "4.46 [...] In dem einen Fall ist der Satz für sämtliche Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze wahr [...]
> Im zweiten Fall ist der Satz für sämtliche Wahrheitsmöglichkeiten falsch [...]
> Im ersten Fall nennen wir den Satz eine Tautologie, im zweiten Fall eine Kontradiktion." ([21], pp. 66-68)[8]

13. *Définition*. **Conséquence d'une fonction de vérité f sur E_0(N).**
Fonction de vérité sur $E_0(N)$ dont l'extension inclut celle de la fonction de vérité f sur $E_0(N)$.

---

7 "5.101 [...] Celles des possibilités de vérité de ses arguments de vérité qui avèrent la proposition, je les nommerai ses raisons de vérité." ([22], p. 66)

8 "4.46 [...] Dans le premier cas la proposition est vraie pour la totalité des possibilités de vérité des propositions élémentaires [...]
Dans le second cas la proposition est fausse pour la totalité des possibilités de vérité [...]
Dans le premier cas nous nommons la proposition une tautologie, dans le second cas une contradiction." ([22], p. 62)

Lui correspond dans le *Tractatus* le paragraphe 5.12 :

> "5.12 Insbesondere folgt die Wahrheit eines Satzes "p" aus der Wahrheit eines anderen "q" wenn alle Wahrheitsgründe des zweiten Wahrheitsgründe des ersten sind." ([21], p. 74)[9]

14. *Théorème*. Chaque fonction de vérité sur $E_0(N)$ est conséquence d'elle-même.

Démonstration.

C'est immédiat par la définition 13. ■

15. *Théorème*. Si les fonctions de vérité f et g sur $E_0(N)$ sont conséquences l'une de l'autre, elles sont identiques.

Lui correspond dans le *Tractatus* le paragraphe 5.141 :

> "5.141 Folgt p aus q und q aus p, so sind sie ein und derselbe Satz." ([21], p. 78)[10]

Démonstration.

Si les fonctions de vérité f et g sur $E_0(N)$ sont conséquences l'une de l'autre, elles ont, par la définition 13, même extension ; elles sont donc, par la définition 10, identiques. ■

Soit une configuration aléthique α de N.

16. *Définition*. **La fonction de vérité singulière f_α sur $E_0(N)$.**
La fonction de vérité sur $E_0(N)$ dont l'extension est le singleton $\{\alpha\}$.

Autrement dit, la table de la fonction de vérité f_α ne compte qu'un seul "1", et précisément sur la ligne où est représentée la configuration α.

17. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité singulières sur $E_0(N)$ est *fini* : il en existe 2^n.

Démonstration.

Par les définitions 10 et 16, il existe autant de fonctions de vérité singulières sur $E_0(N)$ que de configurations aléthiques de N, à savoir 2^n. ■

---

9 "5.12 En particulier la vérité d'une proposition "p" résulte de la vérité d'une autre "q", si toutes les raisons de vérité de la seconde sont raisons de vérité de la première." ([22], p. 66)

10 "5.141 Si p résulte de q et q de p, elles ne sont qu'une seule et même proposition." ([22], p. 68)

2

De la forme au symbole : Formule aléthique et sémantique aléthique

Nous allons maintenant procéder à une symbolisation :

(1) Nous allons définir le concept de formule aléthique sur N.

(2) Nous relierons ce concept à celui de fonction de vérité sur $E_0(N)$ en définissant par récurrence une fonction, la sémantique aléthique $S_{0,N}$, telle qu'à *toute* formule aléthique sur N correspond une fonction de vérité sur $E_0(N)$.

Le concept de formule aléthique sur N s'appuie sur le concept suivant :

18. *Définition*. **L'alphabet aléthique sur N.**
L'ensemble formé :
(1) des noms des propositions de N ;
(2) des caractères :
"$\top$", "$\bot$",
"$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$" ;
(3) des caractères "(" et ")".

19. *Définition*. **Formule aléthique sur N.**

(1) Soit le nom d'une proposition de N ;
(2) soit "$\top$", soit "$\bot$" ;
(3) soit $\neg\varphi$, soit $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$, soit $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)$,
$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules aléthiques sur N.

20. *Définition*. **Le langage aléthique $L_0(N)$.**
L'ensemble des formules aléthiques sur N.

Exemples de formules de $L_0(\{p, q\})$.

$\bot$, q, $\neg p$, $\neg\neg p$, $p \wedge \neg p$, $q \vee p$, $(\neg p \vee q) \wedge \neg\top$.[11]

Nous présupposons que nulle formule de $L_0(N)$ n'est ambiguë. Par exemple, "$\top$" n'est le nom d'aucune proposition de N.

Cela dit, soit une proposition p de N, des formules $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_0(N)$ et une configuration aléthique α de N.

21. *Définition (par récurrence).* **La sémantique aléthique $S_{0,N}$.**

La fonction de $L_0(N)$ dans $\mathcal{E}_0(N)$ telle que :

(1) $[S_{0,N}(p)](\alpha) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α ;
(2) $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$;
(3) $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 0$;
(4) $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$ si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$;
(5) $[S_{0,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha) = 1$ si et seulement si pour chaque i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$;
(6) $[S_{0,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha) = 1$ si et seulement si pour au moins un i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$.

Nous disons que toute formule de $L_0(N)$ symbolise une fonction de vérité sur $E_0(N)$.

À propos de cette définition, clé du chapitre, remarquons ceci :

(1) L'égalité en un point[12] des fonctions $S_{0,N}(\varphi)$ et $S_{0,N}(\psi)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S_{0,N}(\neg\varphi)$ et $S_{0,N}(\neg\psi)$.

(2) Pareillement, l'égalité en un même point, pour chaque i, des fonctions $S_{0,N}(\varphi_i)$ et $S_{0,N}(\psi_i)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S_{0,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$ et $S_{0,N}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k)$, ainsi que celle des fonctions $S_{0,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)$ et $S_{0,N}(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k)$.

Nous dirons que la sémantique aléthique $S_{0,N}$ est *extensionnelle*.

Sur ce, nous dressons, formule après formule, *configuration par configuration*, la table d'une fonction de vérité sur $E_0(\{p, q\})$.

---

11 Nous écrivons "$p \wedge \neg p$", "$q \vee p$" et "$(\neg p \vee q) \wedge \neg\top$" respectivement pour "$(p \wedge \neg p)$", "$(q \vee p)$" et "$((\neg p \vee q) \wedge \neg\top)$".

12 À savoir en un élément de l'espace $E_0(N)$.

Table de la fonction de vérité $S_{0,\{p,q\}}[(\neg p \vee q) \wedge \neg\bot]$ sur $E_0(\{p, q\})$.

α	p	$\neg$p	q	$\neg p \vee q$	$\bot$	$\neg\bot$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg\bot$
$\alpha_1 : \{\underline{p}, \underline{q}\}$	1	0	1	1	0	1	**1**
$\alpha_2 : \{\underline{p}, \overline{q}\}$	1	0	0	0	0	1	**0**
$\alpha_3 : \{\overline{p}, \underline{q}\}$	0	1	1	1	0	1	**1**
$\alpha_4 : \{\overline{p}, \overline{q}\}$	0	1	0	1	0	1	**1**

Ce que nous condensons comme suit :

α	(	$\neg$	p	$\vee$	q	)	$\wedge$	$\neg$	$\bot$
$\alpha_1 : \{\underline{p}, \underline{q}\}$		0	1	1	1		**1**	1	0
$\alpha_2 : \{\underline{p}, \overline{q}\}$		0	1	0	0		**0**	1	0
$\alpha_3 : \{\overline{p}, \underline{q}\}$		1	0	1	1		**1**	1	0
$\alpha_4 : \{\overline{p}, \overline{q}\}$		1	0	1	0		**1**	1	0

Après quoi, toujours en relation avec la sémantique $S_{0,N}$, nous présentons :

(1) Au théorème 22, des *implications* remarquables.

(2) Au théorème 23, des *équivalences* remarquables.

22. *Théorème*.

Pour tout φ et tout ψ de $L_0(N)$:

(1) $S_{0,N}(\bot)$ a pour conséquence $S_{0,N}(\varphi)$,

(2) $S_{0,N}(\varphi)$ a pour conséquence $S_{0,N}(\top)$,

(3) $S_{0,N}(\varphi \wedge \psi)$ a pour conséquence $S_{0,N}(\varphi)$,

(4) $S_{0,N}(\varphi)$ a pour conséquence $S_{0,N}(\varphi \vee \psi)$.

Démonstration.

Lemme.

$S_{0,N}(X)$ a pour conséquence $S_{0,N}(Y)$

si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(X)$ est incluse dans celle de $S_{0,N}(Y)$

- définition 13 ;

si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(X)](\alpha) = 1\}$ est inclus dans $\{\alpha : [S_{0,N}(Y)](\alpha) = 1\}$

- définition 10 ;

si et seulement si quel que soit α, si $[S_{0,N}(X)](\alpha) = 1$, alors $[S_{0,N}(Y)](\alpha) = 1$.

22.(1).

Si $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 1$, alors $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(3).

22.(2).

Si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$, alors $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$

- définition 21.(2).

22.(3).

Si $[S_{0,N}(\varphi \wedge \psi)](\alpha) = 1$,

alors $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(5) ;

alors $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$.

22.(4).

Si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$,

alors $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$;

alors $[S_{0,N}(\varphi \vee \psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(6). ■

23. *Théorème*.

Pour tout φ, tout ψ et tout θ de $L_0(N)$:

(1)	$S_{0,N}(\varphi \wedge \neg\varphi)$	est identique à	$S_{0,N}(\bot)$,
(2)	$S_{0,N}(\varphi \vee \neg\varphi)$	est identique à	$S_{0,N}(\top)$,
(3)	$S_{0,N}(\neg\neg\varphi)$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(4)	$S_{0,N}(\varphi \wedge \varphi)$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(5)	$S_{0,N}(\varphi \vee \varphi)$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(6)	$S_{0,N}(\varphi \vee \bot)$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(7)	$S_{0,N}(\varphi \wedge \top)$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,

(8)	$S_{0,N}[\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)]$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(9)	$S_{0,N}[\varphi \wedge (\varphi \vee \psi)]$	est identique à	$S_{0,N}(\varphi)$,
(10)	$S_{0,N}[\neg(\varphi \wedge \psi)]$	est identique à	$S_{0,N}(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
(11)	$S_{0,N}[\neg(\varphi \vee \psi)]$	est identique à	$S_{0,N}(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$,
(12)	$S_{0,N}[\varphi \vee (\psi \wedge \theta)]$	est identique à	$S_{0,N}[(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)]$,
(13)	$S_{0,N}[\varphi \wedge (\psi \vee \theta)]$	est identique à	$S_{0,N}[(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)]$.

Démonstration.

23.(1).

$[S_{0,N}(\varphi \wedge \neg\varphi)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$
- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 1$
- définition 21.(3).

23.(2).

$[S_{0,N}(\varphi \vee \neg\varphi)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$
- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$
- définition 21.(2).

23.(3).

$[S_{0,N}(\neg\neg\varphi)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 0$
- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(4).

23.(4).

$[S_{0,N}(\varphi \wedge \varphi)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$.

23.(5).

$[S_{0,N}(\varphi \vee \varphi)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$.

23.(6).

$[S_{0,N}(\varphi \vee \bot)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(3).

23.(7).

$[S_{0,N}(\varphi \wedge \top)](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(2).

23.(8).

$\big[S_{0,N}(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))\big](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\varphi \wedge \psi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si :
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$.

23.(9).

$\big[S_{0,N}(\varphi \wedge (\varphi \vee \psi))\big](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\varphi \vee \psi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si :
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$.

23.(10).

$[S_{0,N}(\neg(\varphi \wedge \psi))](\alpha) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi \wedge \psi)](\alpha) = 0$

- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$ et/ou $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 0$

- définition 21.(5) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\neg\psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\neg\varphi \vee \neg\psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(6).

23.(11).

$[S_{0,N}(\neg(\varphi \vee \psi))](\alpha) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi \vee \psi)](\alpha) = 0$

- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$ et $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 0$

- définition 21.(6) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\neg\psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S_{0,N}(\neg\varphi \wedge \neg\psi)](\alpha) = 1$

- définition 21.(5).

23.(12).

$[S_{0,N}(\varphi \vee (\psi \wedge \theta))](\alpha) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\psi \wedge \theta)](\alpha) = 1$

- définition 21.(6) ;

si et seulement si :

$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou

$[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\theta)](\alpha) = 1$

- définition 21.(5) ;

si et seulement si :

$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$ et

$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\theta)](\alpha) = 1$;

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi \vee \psi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\varphi \vee \theta)](\alpha) = 1$

- définition 21.(6) ;

si et seulement si $[S_{0,N}((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta))](\alpha) = 1$

- définition 21.(5).

23.(13).

$[S_{0,N}(\varphi \wedge (\psi \vee \theta))](\alpha) = 1$
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\psi \vee \theta)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si :
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et
$[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\theta)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si :
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1$ et/ou
$[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\theta)](\alpha) = 1$;
si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi \wedge \psi)](\alpha) = 1$ et/ou $[S_{0,N}(\varphi \wedge \theta)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si $[S_{0,N}((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta))](\alpha) = 1$
- définition 21.(6). ■

Nous avons vu (définition 21) que toute formule aléthique sur N symbolise une fonction de vérité sur $E_0(N)$. Réciproquement, nous allons démontrer (théorème 29) que *quelle que soit* la fonction de vérité sur $E_0(N)$, il existe au moins une formule aléthique sur N qui la symbolise.

Nous introduisons à cette fin les notations suivantes :

Soit des formules $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_k)$ et un ensemble fini X.

La notation “$\bigwedge_X \varphi(x)$” désigne la formule :

(1) “$\top$”, si l'ensemble X n'est formé d'aucun élément ;
(2) $\varphi(x_1)$, si l'ensemble X est formé du seul élément x_1 ;
(3) $\varphi(x_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_k)$, si l'ensemble X est formé des k ($k \geq 2$) éléments $x_1, \ldots, x_k$.

La notation “$\bigvee_X \varphi(x)$” désigne la formule :

(1) “$\perp$”, si l'ensemble X n'est formé d'aucun élément ;
(2) $\varphi(x_1)$, si l'ensemble X est formé du seul élément x_1 ;
(3) $\varphi(x_1) \vee \ldots \vee \varphi(x_k)$, si l'ensemble X est formé des k ($k \geq 2$) éléments $x_1, \ldots, x_k$.

Soit l'ensemble $\underline{\alpha}$ [l'ensemble $\overline{\alpha}$] des propositions p_k de N auxquelles correspond le vrai [le faux] dans la configuration aléthique α de N.

La notation “p^α” désigne la formule $(\bigwedge_{\underline{\alpha}} p_k) \wedge (\bigwedge_{\overline{\alpha}} \neg p_k)$ de $L_0(N)$.

Exemple : les quatre formules p^{α_i} de $L_0(\{p, q\})$.

p^{α_1} :	$p \wedge q$
p^{α_2} :	$p \wedge \neg q$
p^{α_3} :	$\neg p \wedge q$
p^{α_4} :	$\neg p \wedge \neg q$

24. *Définition*. **Conjonction complète de L_0(N).**
Formule p^{α} de $L_0(N)$, α étant n'importe quelle configuration aléthique de N.

25. *Théorème*. Le nombre des conjonctions complètes de $L_0(N)$ est *fini* : il en existe 2^n.

Démonstration.

Par la définition 24, il existe autant de conjonctions complètes de $L_0(N)$ que de configurations aléthiques de N, à savoir 2^n. ■

26. *Théorème*.

Quelle que soit la fonction de vérité singulière f_{α} sur $E_0(N)$, il existe une et une seule conjonction complète de $L_0(N)$ qui la symbolise : p^{α}.

Démonstration.

$[S_{0,N}(p^{\alpha})](\beta) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}((\bigwedge_{\underline{\alpha}} p_k) \wedge (\bigwedge_{\overline{\alpha}} \neg p_k))](\beta) = 1$;

si et seulement si $[S_{0,N}(\bigwedge_{\underline{\alpha}} p_k)](\beta) = 1$ et $[S_{0,N}(\bigwedge_{\overline{\alpha}} \neg p_k)](\beta) = 1$

- définition 21.(5) ;

si et seulement si :

pour chaque p_k dans $\underline{\alpha}$, $p_k(\beta) = 1$ et

pour chaque p_k dans $\overline{\alpha}$, $\neg p_k(\beta) = 1$;

si et seulement si :

pour chaque p_k dans $\underline{\alpha}$, $p_k(\beta) = 1$ et

pour chaque p_k dans $\overline{\alpha}$, $p_k(\beta) = 0$

- définition 21.(4) ;

si et seulement si :
pour chaque p_k dans $\underline{\alpha}$, p_k est dans $\underline{\beta}$ et
pour chaque p_k dans $\overline{\alpha}$, p_k est dans $\overline{\beta}$
- définition 21.(1) ;
si et seulement si β est identique à α
- définition 3 ;
si et seulement si $f_\alpha(\beta) = 1$
- définition 16.

Les fonctions de vérité f_α et $S_{0,N}(p^\alpha)$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule p^α symbolise bien la fonction de vérité f_α sur $E_0(N)$. ■

27. *Définition*. **Disjonction canonique de L_0(N).**
Formule $\bigvee_X p^\alpha$ de L_0(N), X étant n'importe quel ensemble de configurations aléthiques de N.

28. *Théorème*. Le nombre des disjonctions canoniques de L_0(N) est *fini* : il en existe $2^{(2^n)}$.

Démonstration.

Par la définition 27, il existe autant de disjonctions canoniques de L_0(N) que d'ensembles de configurations aléthiques de N, à savoir $2^{(2^n)}$. ■

29. *Théorème de forme normale disjonctive complète*.

Quelle que soit la fonction de vérité f sur E_0(N), il existe une et une seule disjonction canonique de L_0(N) qui la symbolise : $\bigvee_{\{\alpha\,:\,f(\alpha)\,=\,1\}} p^\alpha$.

Démonstration.

$[S_{0,N}(\bigvee_{\{\alpha\,:\,f(\alpha)\,=\,1\}} p^\alpha)](\beta) = 1$
si et seulement si pour au moins un α tel que $f(\alpha) = 1$, $[S_{0,N}(p^\alpha)](\beta) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si pour au moins un α tel que $f(\alpha) = 1$, β est identique à α
- théorème 26 ;
si et seulement si $f(\beta) = 1$.

Les fonctions de vérité f et $S_{0,N}(\bigvee_{\{\alpha\,:\,f(\alpha)\,=\,1\}} p^\alpha)$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule $\bigvee_{\{\alpha\,:\,f(\alpha)\,=\,1\}} p^\alpha$ symbolise bien la fonction de vérité f sur E_0(N). ■

Seconde partie

LOGIQUE ALÉTHICO-DÉONTIQUE

Première section

LE CAS D'UNE AUTORITÉ

3

De l'objet à la forme : Configuration aléthico-déontique et fonction de vérité

Les notions de permis et d'interdit, en abrégé “le permis” et “l'interdit”, ainsi que les notions de vrai et de faux sont sous-jacentes à notre logique aléthico-déontique.

Soit une Autorité A.

30. *Définition*. **Action pour l'Autorité A.**

Ce qui est soit permis soit interdit par l'Autorité A.

31. *Postulat*.

Toute action pour l'Autorité A est une configuration aléthique d'un ensemble *fini* de proposition(s).

L'énoncé 31 est le point culminant du texte : il croise le déontique avec l'aléthique de telle sorte que la méthode présentée dans l'introduction peut être applicable à la question déontique.

32. *Axiome*.

Pour tout nombre entier positif i, il existe au moins un ensemble I formé de i proposition(s) tel que chaque configuration aléthique de I est une action pour l'Autorité A.

Soit un tel ensemble *fini* N, formé de n proposition(s).

C'est dans ce cadre propositionnel que nous allons, suivant la méthode présentée dans l'introduction, procéder à la formalisation :

(1) Nous allons définir un concept de fonction de vérité.

(2) Nous relierons ce concept à celui de proposition en admettant que chaque fonction de vérité exprime une proposition.

Ce concept de fonction de vérité s'appuie sur le concept de configuration aléthico-déontique de N∪{A}, clé du chapitre, lui-même en appui sur celui de configuration déontique de N∪{A}.

33. *Définition*. **Configuration déontique de N.**

Fonction telle qu'à *chaque* élément de $E_0(N)$ correspond soit le permis soit l'interdit.

34. *Définition*. **Configuration déontique de N∪{A}.**

Réunion du singleton {A} et d'une configuration déontique de N.

Cette définition 34 est *légitimée* par les énoncés 30 et 31.

35. *Définition*. **Configuration aléthico-déontique de N∪{A}.**

Ensemble formé d'une configuration aléthique de N et d'une configuration déontique de N∪{A}.

36. *Théorème*. Le nombre des configurations aléthico-déontiques de N∪{A} est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(2^n)}$.

Démonstration.

Par les définitions 34 et 35, le nombre des configurations aléthico-déontiques de N∪{A} est égal au produit du nombre des configurations aléthiques de N (à savoir 2^n) par le nombre des configurations déontiques de N (à savoir, l'ensemble $E_0(N)$ étant formé de 2^n éléments, $2^{(2^n)}$).

Le nombre des configurations aléthico-déontiques de N∪{A} est donc égal à $2^n \times 2^{(2^n)}$. ■

37. *Définition*. **L'espace aléthico-déontique E_1(N∪{A}).**
La *totalité* des configurations aléthico-déontiques de N∪{A}.

Nous allons illustrer cette définition. Plus précisément, nous allons figurer par autant de pictogrammes :

(1) Chacune des configurations aléthiques, déontiques et aléthico-déontiques d'un ensemble formé d'une proposition (et d'une Autorité).

(2) Chacune des configurations aléthiques et déontiques d'un ensemble formé d'une proposition supplémentaire.

Les mots en italique ci-après, ainsi que les signaux routiers dont il s'agira auront le sens qui leur est donné dans la Convention sur la signalisation routière, faite à Vienne le 8 novembre 1968 sous les auspices de l'Organisation des Nations Unies[13]. Les passages de la Convention où il est question de ces termes ou de ces signaux sont reproduits en annexe (pp. 85-87).

Soit alors la *législation nationale* d'un État A, législation par hypothèse conforme à cette Convention ONU sur la signalisation routière.

Dans ce cadre juridique, imaginons le *conducteur* d’un véhicule s'approchant d'une *intersection* en “Y” et posons par hypothèse qu’il va soit emprunter la *route* de gauche, soit emprunter la *route* de droite.

Sur ce, admettons que la phrase :

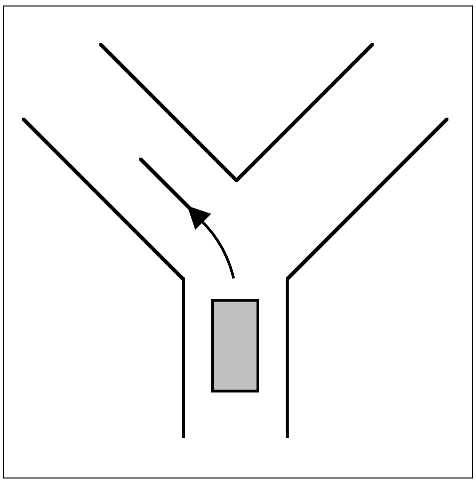
Le conducteur emprunte la route de gauche.

exprime une proposition p qui est telle que chaque configuration aléthique de {p} est une action pour l'État A.

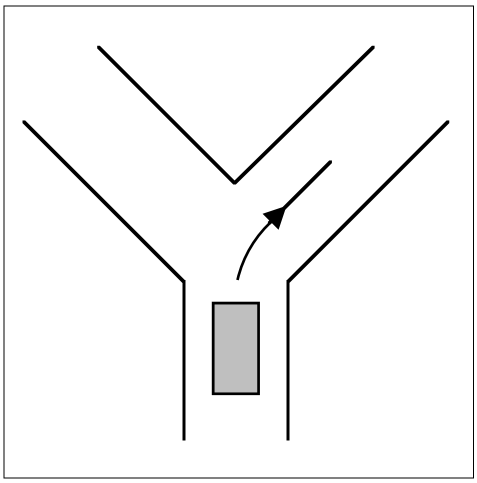
Nous en inférons que les quatorze pictogrammes ci-après figurent respectivement les deux configurations aléthiques de {p}, les quatre configurations déontiques de {p, A} et les huit configurations aléthico-déontiques de {p, A}.

Chaque pictogramme figurant une configuration aléthico-déontique de {p, A} est la combinaison d'un pictogramme figurant une configuration aléthique de {p} avec un pictogramme figurant une configuration déontique de {p, A}, et réciproquement.

Expressions pictographiques des deux configurations aléthiques de {p}.



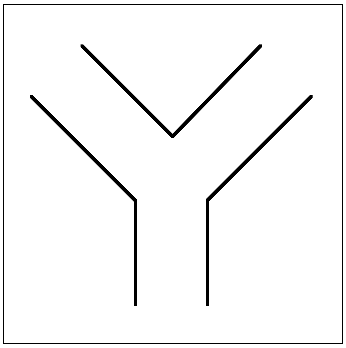
Configuration α_1.



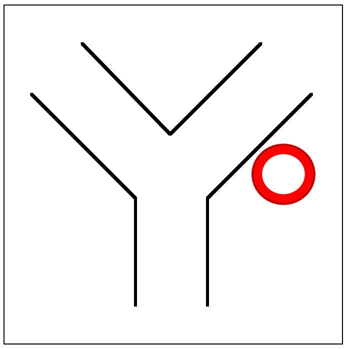
Configuration α_2.

13 En France, cette Convention est entrée en vigueur le 6 juin 1978 et a été publiée le 21 août 1981 (décret n° 81-796 du 4 août 1981).

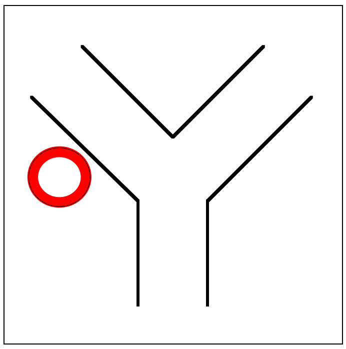
Expressions pictographiques des quatre configurations déontiques de {p, A}.



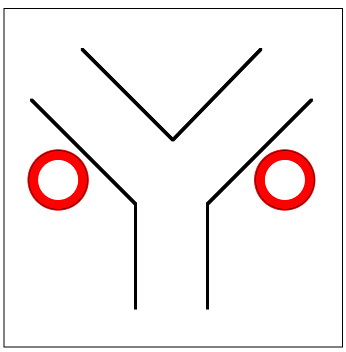
Configuration Δ_1^A.



Configuration Δ_2^A.

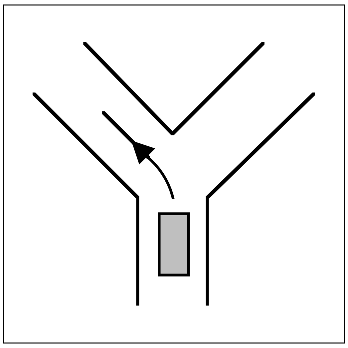


Configuration Δ_3^A.

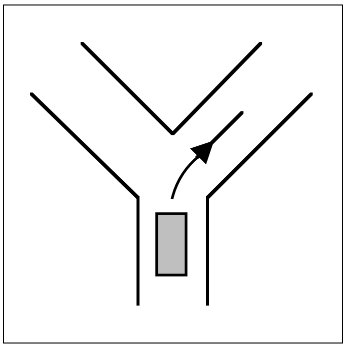


Configuration Δ_4^A.

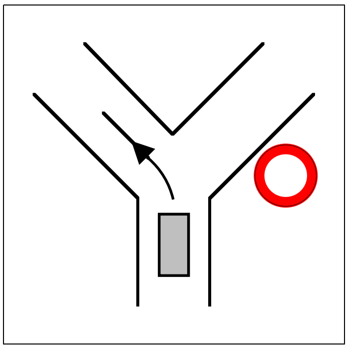
Expressions pictographiques des huit configurations aléthico-déontiques de $\{p, A\}$.



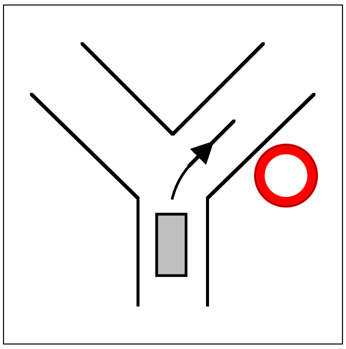
Configuration (α_1, Δ_1^A).



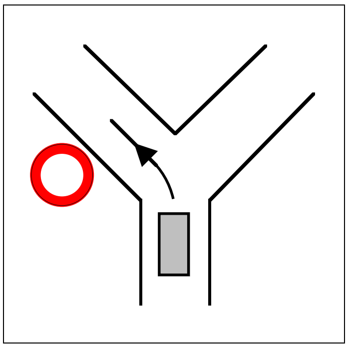
Configuration (α_2, Δ_1^A).



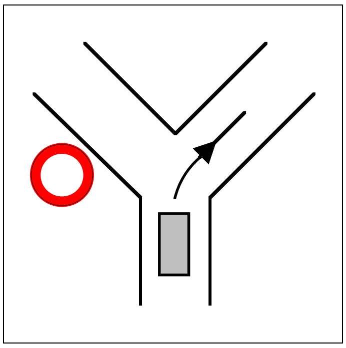
Configuration (α_1, Δ_2^A).



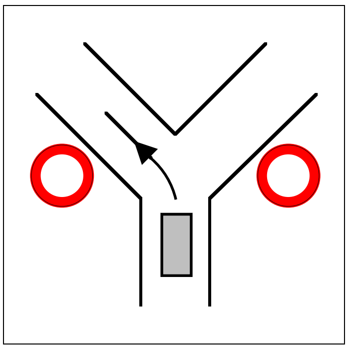
Configuration (α_2, Δ_2^A).



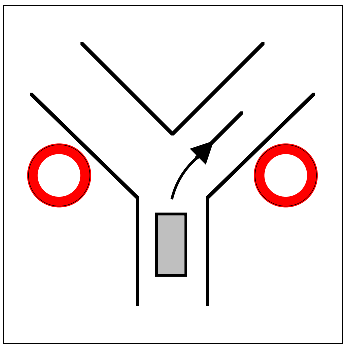
Configuration (α_1, Δ_3^A).



Configuration (α_2, Δ_3^A).



Configuration (α_1, Δ_4^A).



Configuration (α_2, Δ_4^A).

Posons à présent par hypothèse qu'en plus d'emprunter soit la route de gauche, soit celle de droite, le conducteur va soit rouler à plus de 30 km/h, soit rouler à moins de 30 km/h.

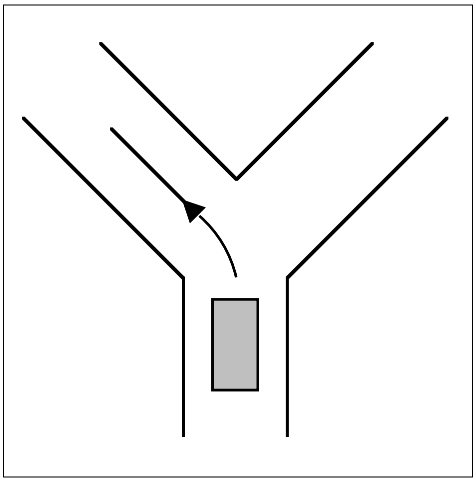
Sur ce, admettons que les deux phrases :

Le conducteur emprunte la route de gauche.
Le conducteur roule à plus de 30 km/h.

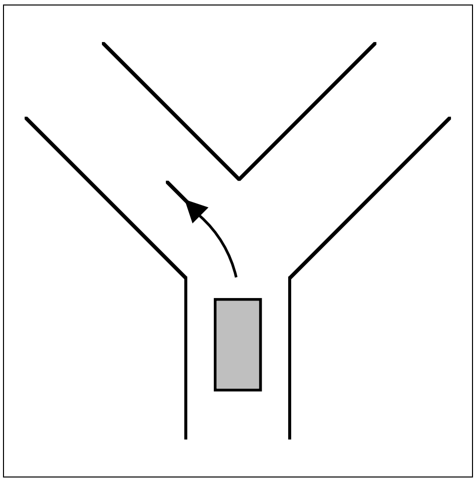
expriment respectivement deux propositions p et q qui sont telles que chaque configuration aléthique de {p, q} est une action pour l'État A.

Nous en inférons que les vingt pictogrammes ci-après figurent respectivement les quatre configurations aléthiques de {p, q} et les seize configurations déontiques de {p, q, A}.

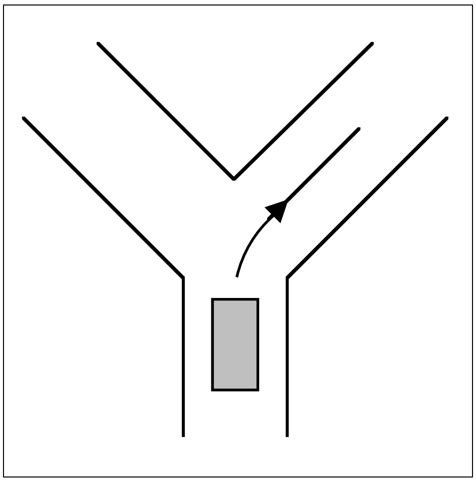
Expressions pictographiques des quatre configurations aléthiques de {p, q}.



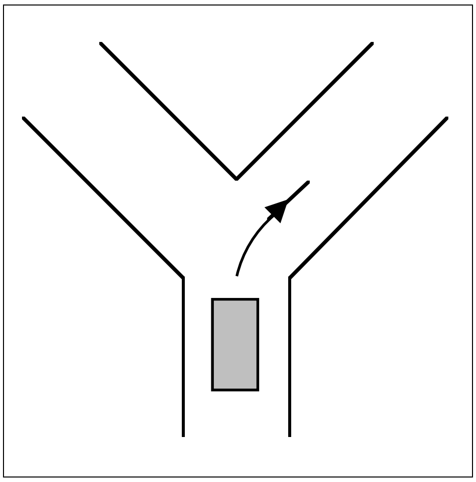
Configuration α_1.



Configuration α_2.

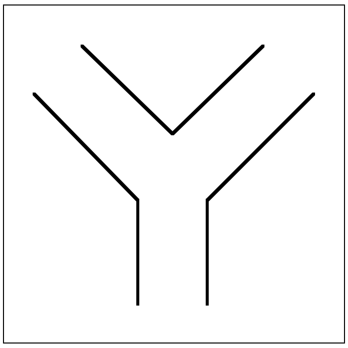


Configuration α_3.

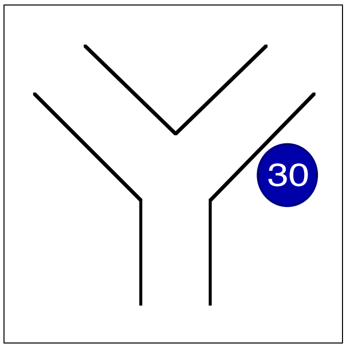


Configuration α_4.

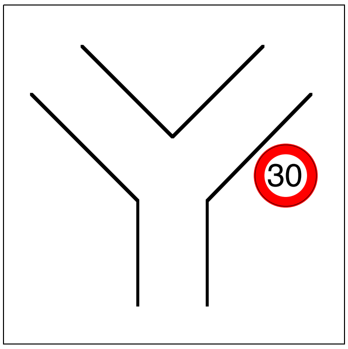
Expressions pictographiques des seize configurations déontiques de $\{p, q, A\}$.



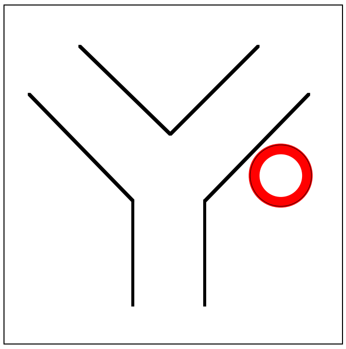
Configuration Δ_1^A.



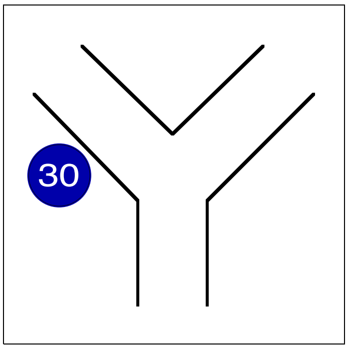
Configuration Δ_2^A.



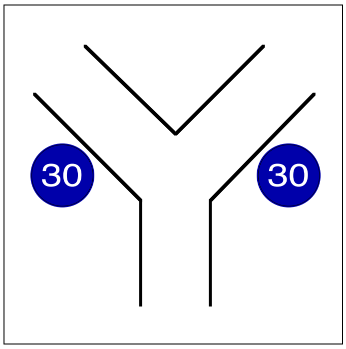
Configuration Δ_3^A.



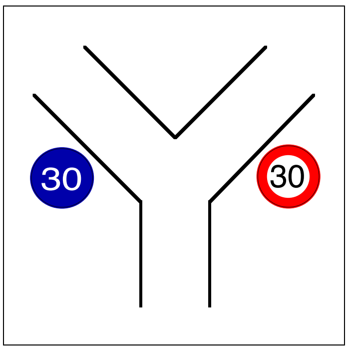
Configuration Δ_4^A.



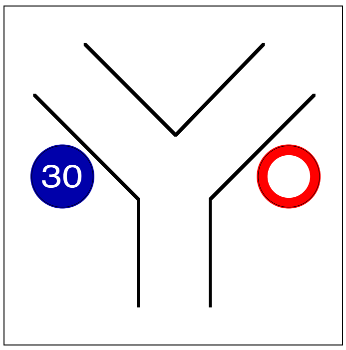
Configuration Δ_5^A.



Configuration Δ_6^A.

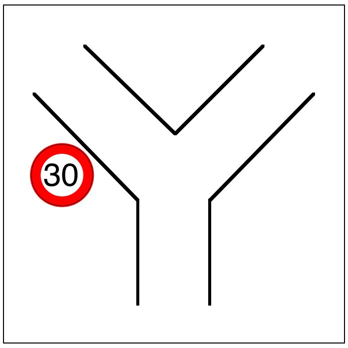


Configuration Δ_7^A.

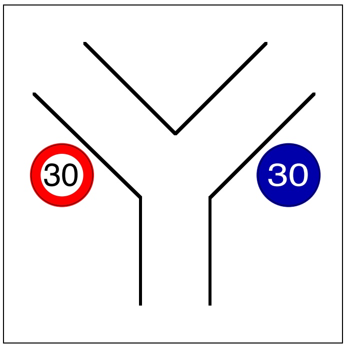


Configuration Δ_8^A.

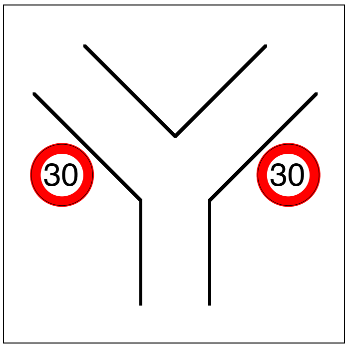
Expressions pictographiques des seize configurations déontiques de $\{p, q, A\}$ (suite).



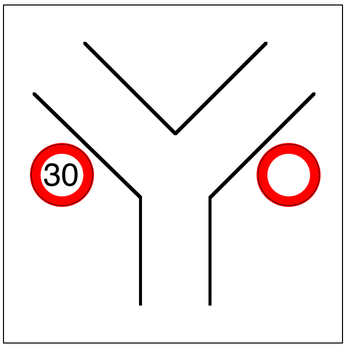
Configuration Δ_9^A.



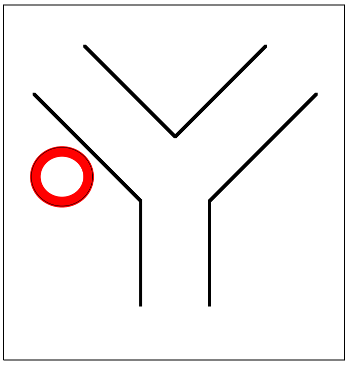
Configuration Δ_{10}^A.



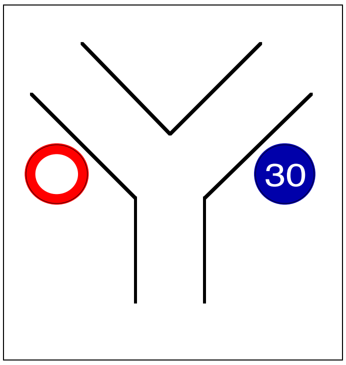
Configuration Δ_{11}^A.



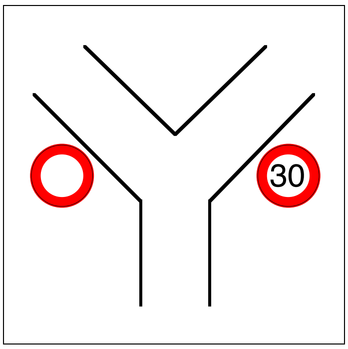
Configuration Δ_{12}^A.



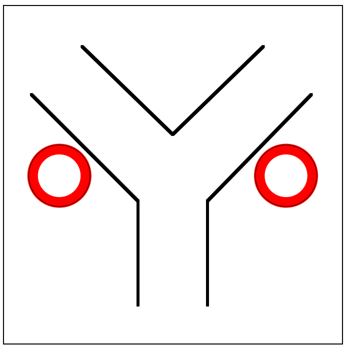
Configuration Δ_{13}^A.



Configuration Δ_{14}^A.



Configuration Δ_{15}^A.



Configuration Δ_{16}^A.

38. *Définition*. **Le voisinage d'une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de N∪{A}.**

L'ensemble formé des configurations aléthico-déontiques (β , Δ^A) de N∪{A}, β étant n'importe quelle configuration aléthique de N.

39. *Théorème*.

Les voisinages des configurations aléthico-déontiques de N∪{A} forment une partition de l'espace E_1(N∪{A}) en $2^{(2^n)}$ parties équipotentes.

Démonstration.

Primo, par la définition 38, chaque voisinage est formé d'autant d'éléments que de configurations aléthiques de N, à savoir 2^n.

Secundo, par la définition 38, chaque configuration aléthico-déontique de N∪{A} est dans son voisinage.

Tertio, si V = {(β, Δ^A), β dans E_0(N)} et W = {(γ, E^A), γ dans E_0(N)} sont deux voisinages, alors :
soit E^A est identique à Δ^A, et donc V et W sont identiques,
soit E^A est différent de Δ^A, et donc V et W ont une intersection vide.

Par conséquent, les voisinages des configurations aléthico-déontiques de N∪{A} forment bien une partition de l'espace E_1(N∪{A}) en $2^{(2^n)}$ parties équipotentes. ■

Venons-en alors au concept de fonction de vérité sur E_1(N∪{A}).

40. *Définition*. **Fonction de vérité sur E_1(N∪{A}).**

Fonction telle qu'à *chaque* élément de E_1(N∪{A}) correspond soit le vrai soit le faux.

Table d'une fonction de vérité f sur E_1({p, A}).

Dans la colonne de gauche sont représentées les huit configurations aléthico-déontiques de {p, A} et, à leur droite, la valeur qui leur correspond par la fonction de vérité f.
La notation "{$\bar{p}$}" ["{$\bar{p}$}"] signifie qu'à la configuration aléthique {$\bar{p}$} correspond le permis [l'interdit].
La lettre "A" désigne l'Autorité A.

(α, Δ^A)	f
$(\alpha_1, \Delta_1^A) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1
$(\alpha_2, \Delta_1^A) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1
$(\alpha_1, \Delta_2^A) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1
$(\alpha_2, \Delta_2^A) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1
$(\alpha_1, \Delta_3^A) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0
$(\alpha_2, \Delta_3^A) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1
$(\alpha_1, \Delta_4^A) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0
$(\alpha_2, \Delta_4^A) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1

41. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité sur $E_1(N\cup\{A\})$ est *fini* : il en existe $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$.

Démonstration.

Par le théorème 36, l'espace $E_1(N\cup\{A\})$ est formé de $2^n \times 2^{(2^n)}$ éléments ; il existe donc, par la définition 40, $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$ fonctions de vérité sur $E_1(N\cup\{A\})$. ■

42. *Définition*. **L'espace fonctionnel $\mathcal{E}_1(N\cup\{A\})$.**
La *totalité* des fonctions de vérité sur $E_1(N\cup\{A\})$.

43. *Axiome*.

Chaque fonction de vérité sur $E_1(N\cup\{A\})$ exprime une proposition.

Cet axiome *justifie* l'énoncé 40.

44. *Définition*. **L'extension d'une fonction de vérité f sur $E_1(N\cup\{A\})$.**

L'ensemble des configurations aléthico-déontiques de $N\cup\{A\}$ auxquelles correspond le vrai par la fonction de vérité f.

45. *Définition*. **La fonction de vérité tautologique sur $E_1(N\cup\{A\})$.**
La fonction de vérité sur $E_1(N\cup\{A\})$ dont l'extension est l'espace $E_1(N\cup\{A\})$.

46. *Définition*. **La fonction de vérité contradictoire sur E_1(N∪{A}).**
La fonction de vérité sur E_1(N∪{A}) dont l'extension est l'ensemble vide.

47. *Définition*. **Conséquence d'une fonction de vérité f sur E_1(N∪{A}).**
Fonction de vérité sur E_1(N∪{A}) dont l'extension inclut celle de la fonction de vérité f sur E_1(N∪{A}).

48. *Théorème*. Chaque fonction de vérité sur E_1(N∪{A}) est conséquence d'elle-même.

Démonstration.

C'est immédiat par la définition 47. ■

49. *Théorème*. Si les fonctions de vérité f et g sur E_1(N∪{A}) sont conséquences l'une de l'autre, elles sont identiques.

Démonstration.

Si les fonctions de vérité f et g sur E_1(N∪{A}) sont conséquences l'une de l'autre, elles ont, par la définition 47, même extension ; elles sont donc, par la définition 44, identiques. ■

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de N∪{A}.

50. *Définition*. **La fonction de vérité singulière $f_{(\alpha, \Delta^A)}$ sur E_1(N∪{A}).**
La fonction de vérité sur E_1(N∪{A}) dont l'extension est le singleton $\{(\alpha, \Delta^A)\}$.

Autrement dit, la table de la fonction de vérité $f_{(\alpha, \Delta^A)}$ ne compte qu'un seul “1”, et précisément sur la ligne où est représentée la configuration (α, Δ^A).

51. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité singulières sur E_1(N∪{A}) est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(2^n)}$.

Démonstration.

Par les définitions 44 et 50, il existe autant de fonctions de vérité singulières sur E_1(N∪{A}) que de configurations aléthico-déontiques de N∪{A}, à savoir $2^n \times 2^{(2^n)}$. ■

4

De la forme au symbole : Formule aléthico-déontique et sémantique aléthico-déontique

Pour la seconde fois, nous allons procéder à une symbolisation :

(1) Nous allons définir le concept de formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$.

(2) Nous relierons ce concept à celui de fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$ en définissant par récurrence une fonction, la sémantique aléthico-déontique $S^A_{1,N}$, telle qu'à *toute* formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$ correspond une fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$.

Le concept de formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$ s'appuie sur le concept suivant :

52. *Définition*. **L'alphabet aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$.**

L'ensemble formé :

(1) des noms des propositions de N ;

(2) des caractères :

"$\top$", "$\bot$",

"$\neg$", "$\wedge$", "$\vee$",

"P^A" (comme "Permission par A"), "O^A"(comme "Obligation par A") ;

(3) des caractères "(" et ")".

53. *Définition*. **Formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$.**

(1) Soit le nom d'une proposition de N ;

(2) soit "$\top$", soit "$\bot$" ;

(3) soit $\neg\varphi$, soit $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$, soit $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)$, soit $P^A\varphi$, soit $O^A\varphi$,

$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules aléthico-déontiques sur $N \cup \{A\}$.

54. *Définition*. **Le langage aléthico-déontique $L_1(N \cup \{A\})$.**

L'ensemble des formules aléthico-déontiques sur $N \cup \{A\}$.

Exemples de formules de $L_1(\{p, q, A\})$.

$\bot$, $\neg p \vee q$, $P^A(p \wedge q)$, $O^A(p \vee \neg q)$, $\neg q \wedge P^A q$, $O^A O^A p$, $P^A(O^A p \vee q)$.[14]

Nous présupposons que nulle formule de $L_1(N \cup \{A\})$ n'est ambiguë. Par exemple, "A" n'est le nom d'aucune proposition de N.

Cela dit, soit une proposition p de N, des formules $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de $L_1(N \cup \{A\})$ et une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$.

55. *Définition (par récurrence).* **La sémantique aléthico-déontique $S^A_{1,N}$.**

La fonction de $L_1(N \cup \{A\})$ dans $\mathcal{E}_1(N \cup \{A\})$ telle que :

(1) $[S^A_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α ;
(2) $[S^A_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$;
(3) $[S^A_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^A) = 0$;
(4) $[S^A_{1,N}(\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si $[S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 0$;
(5) $[S^A_{1,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si pour chaque i, $[S^A_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^A) = 1$;
(6) $[S^A_{1,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si pour au moins un i, $[S^A_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^A) = 1$;
(7) $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$;
(8) $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$.

Nous disons à nouveau que toute formule de $L_1(N \cup \{A\})$ symbolise une fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$.

À propos de cette définition, clé du chapitre, remarquons bien ceci :

(1) Ici aussi l'égalité en un point[15] des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi)$ et $S^A_{1,N}(\psi)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S^A_{1,N}(\neg\varphi)$ et $S^A_{1,N}(\neg\psi)$.

(2) Pareillement, l'égalité en un même point, pour chaque i, des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi_i)$ et $S^A_{1,N}(\psi_i)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$ et $S^A_{1,N}(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k)$, ainsi que celle des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)$ et $S^A_{1,N}(\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k)$.

---

14 Nous écrivons "$\neg p \vee q$" et "$\neg q \wedge P^A q$" respectivement pour "$(\neg p \vee q)$" et "$(\neg q \wedge P^A q)$".

15 À savoir en un élément de l'espace $E_1(N \cup \{A\})$.

(3) Par contre, l'égalité en un point des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi)$ et $S^A_{1,N}(\psi)$ n'implique ni l'égalité en ce point des fonctions $S^A_{1,N}(P^A\varphi)$ et $S^A_{1,N}(P^A\psi)$, ni celle des fonctions $S^A_{1,N}(O^A\varphi)$ et $S^A_{1,N}(O^A\psi)$.

(4) Néanmoins, et c'est important, l'égalité sur le voisinage d'un point des fonctions $S^A_{1,N}(\varphi)$ et $S^A_{1,N}(\psi)$ implique l'égalité sur ce voisinage des fonctions $S^A_{1,N}(P^A\varphi)$ et $S^A_{1,N}(P^A\psi)$, ainsi que celle des fonctions $S^A_{1,N}(O^A\varphi)$ et $S^A_{1,N}(O^A\psi)$.

Nous dirons que la sémantique aléthico-déontique $S^A_{1,N}$ est *intensionnelle*.

La sémantique $S_{0,N}$ *se plonge* dans la sémantique $S^A_{1,N}$, à savoir :

Soit des formules φ et ψ de $L_0(N)$, ainsi qu'une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$.

56. *Théorème*.

Les sémantiques $S_{0,N}$ et $S^A_{1,N}$ sont telles que $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = [S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A)$.

Démonstration.

Nous procédons par récurrence sur le langage aléthique $L_0(N)$: il y a trois cas de base et trois cas de récurrence.

Premier cas de base.
$[S_{0,N}(p)](\alpha) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α
- définition 21.(1) ;
$[S^A_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^A) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α
- définition 55.(1) ;
donc $[S_{0,N}(p)](\alpha) = [S^A_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^A)$.

Deuxième cas de base.
$[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$ et $[S^A_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définitions 21.(2) et 55.(2) ;
donc $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = [S^A_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^A)$.

Troisième cas de base.
$[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 0$ et $[S^A_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définitions 21.(3) et 55.(3) ;
donc $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = [S^A_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^A)$.

Premier cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$
- définition 21.(4) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- hypothèse de récurrence ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(4).

Deuxième cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha) = 1$
si et seulement si pour chaque i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;
si et seulement si pour chaque i, $[S^A_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- hypothèse de récurrence ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5).

Troisième cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha) = 1$
si et seulement si pour au moins un i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;
si et seulement si pour au moins un i, $[S^A_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- hypothèse de récurrence ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6). ■

57. *Théorème*. La fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est tautologique si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est tautologique.

Démonstration.

La fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est tautologique
si et seulement si l'extension de $S^A_{1,N}(\varphi)$ est l'espace $E_1(N \cup \{A\})$
- définition 45 ;
si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$ est l'espace $E_1(N \cup \{A\})$
- définition 44 ;
si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$ est l'espace $E_0(N)$
- théorème 56 ;
si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\varphi)$ est l'espace $E_0(N)$
- définition 10 ;
si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est tautologique
- définition 11. ■

58. *Théorème*. La fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est contradictoire si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est contradictoire.

Démonstration.

La fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est contradictoire
si et seulement si l'extension de $S^A_{1,N}(\varphi)$ est l'ensemble vide
- définition 46 ;
si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$ est l'ensemble vide
- définition 44 ;
si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$ est l'ensemble vide
- théorème 56 ;
si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\varphi)$ est l'ensemble vide
- définition 10 ;
si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est contradictoire
- définition 12. ■

59. *Théorème*. La fonction $S^A_{1,N}(\psi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est conséquence de la fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\psi)$ sur $E_0(N)$ est conséquence de la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$.

Démonstration.

La fonction $S^A_{1,N}(\psi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$ est conséquence de la fonction $S^A_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \{A\})$
si et seulement si l'extension de $S^A_{1,N}(\psi)$ inclut celle de $S^A_{1,N}(\varphi)$
- définition 47 ;
si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$ inclut $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$
- définition 44 ;
si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1\}$ inclut $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$
- théorème 56 ;
si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\psi)$ inclut celle de $S_{0,N}(\varphi)$
- définition 10 ;
si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\psi)$ sur $E_0(N)$ est conséquence de la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$
- définition 13. ■

Là-dessus, nous dressons, formule après formule, *voisinage par voisinage*, la table d'une fonction de vérité sur $E_1(\{p, A\})$. Les astérisques indiquent les configurations aléthico-déontiques (β, Δ^A) de $\{p, A\}$ telles qu'à β correspond le permis dans Δ^A.

Table de la fonction de vérité $S^{A}_{1,\{p\}}[P^{A}(\neg p \vee O^{A}\bot)]$ sur $E_1(\{p, A\})$.

	(α, Δ^A)	p	¬p	⊥	$O^A\bot$	$\neg p \vee O^A\bot$	$P^A(\neg p \vee O^A\bot)$
*	$(\alpha_1, \Delta^A_1) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	0	**1**
*	$(\alpha_2, \Delta^A_1) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	1	**1**
*	$(\alpha_1, \Delta^A_2) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	0	**0**
	$(\alpha_2, \Delta^A_2) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	1	**0**
	$(\alpha_1, \Delta^A_3) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	0	**1**
*	$(\alpha_2, \Delta^A_3) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	1	**1**
	$(\alpha_1, \Delta^A_4) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	1	1	**0**
	$(\alpha_2, \Delta^A_4) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	1	1	**0**

Ce que nous condensons comme suit :

	(α, Δ^A)	P^A (	¬	p	∨	O^A	⊥)
*	$(\alpha_1, \Delta^A_1) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**1**	0	1	0	0	0
*	$(\alpha_2, \Delta^A_1) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**1**	1	0	1	0	0
*	$(\alpha_1, \Delta^A_2) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**0**	0	1	0	0	0
	$(\alpha_2, \Delta^A_2) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**0**	1	0	1	0	0
	$(\alpha_1, \Delta^A_3) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**1**	0	1	0	0	0
*	$(\alpha_2, \Delta^A_3) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**1**	1	0	1	0	0
	$(\alpha_1, \Delta^A_4) : \{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**0**	0	1	1	1	0
	$(\alpha_2, \Delta^A_4) : \{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	**0**	1	0	1	1	0

Après quoi, toujours en relation avec la sémantique $S^A_{1,N}$, nous présentons :

(1) Au théorème 60, des *implications* et *non-implications* remarquables.

(2) Au théorème 61, des *équivalences* et *non-équivalences* remarquables.

60. *Théorème*.

Pour tout φ et tout ψ de $L_1(N \cup \{A\})$:

(1)	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$	a pour conséquence	$S^A_{1,N}(O^A\bot \vee P^A\varphi)$,
(2)	$S^A_{1,N}(P^A\top \wedge O^A\varphi)$	a pour conséquence	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$,
(3)	$S^A_{1,N}[P^A(\varphi \wedge \psi)]$	a pour conséquence	$S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge P^A\psi)$,
(4)	$S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee O^A\psi)$	a pour conséquence	$S^A_{1,N}[O^A(\varphi \vee \psi)]$.

Pour au moins un φ et un ψ de $L_1(N \cup \{A\})$:

(5)	$S^A_{1,N}(\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$,
(6)	$S^A_{1,N}(\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$,
(7)	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(\varphi)$,
(8)	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$,
(9)	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(\varphi)$,
(10)	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$,
(11)	$S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge P^A\psi)$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}[P^A(\varphi \wedge \psi)]$,
(12)	$S^A_{1,N}[O^A(\varphi \vee \psi)]$	n'a pas pour conséquence	$S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee O^A\psi)$.

Démonstration.

Lemme.

$S^A_{1,N}(X)$ a pour conséquence $S^A_{1,N}(Y)$

si et seulement si l'extension de $S^A_{1,N}(X)$ est incluse dans celle de $S^A_{1,N}(Y)$

- définition 47 ;

si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(X)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$ est inclus dans $\{(\alpha, \Delta^A) : [S^A_{1,N}(Y)](\alpha, \Delta^A) = 1\}$

- définition 44 ;

si et seulement si quel que soit (α, Δ^A), si $[S^A_{1,N}(X)](\alpha, \Delta^A) = 1$, alors $[S^A_{1,N}(Y)](\alpha, \Delta^A) = 1$.

60.(1).

Si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$,

alors pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(8) ;

alors :

pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\bot)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou

pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(3) ;

alors $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\bot)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et/ou $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définitions 55.(8) et 55.(7) ;

alors $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\bot \vee P^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(6).

60.(2).

Si $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\top \wedge O^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$,
alors $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\top)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(5) ;

alors :
pour au moins un (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\top)](\beta, \Delta^{A}) = 1$ et
pour chaque (γ, Δ^{A}) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{A}) = 1$
- définitions 55.(7) et 55.(8) ;

alors pour au moins un (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(2) ;

alors $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(7).

60.(3).

Si $[S^{A}_{1,N}(P^{A}(\varphi \wedge \psi))](\alpha, \Delta^{A}) = 1$,
alors pour au moins un (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\varphi \wedge \psi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(7) ;

alors pour au moins un (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A},
$[S^{A}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(\psi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(5) ;

alors :
pour au moins un (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$ et
pour au moins un (γ, Δ^{A}) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{A}) = 1$;
alors $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\psi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(7) ;

alors $[S^{A}_{1,N}(P^{A}\varphi \wedge P^{A}\psi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(5).

60.(4).

Si $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\varphi \vee O^{A}\psi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$,
alors $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\varphi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et/ou $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\psi)](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(6) ;

alors :
pour chaque (β, Δ^{A}) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{A}) = 1$ et/ou
pour chaque (γ, Δ^{A}) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(8) ;

alors pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$;
alors pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \vee \psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6) ;
alors $[S^A_{1,N}(O^A(\varphi \vee \psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8).

60.(5).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à α correspond l'interdit dans Δ^A.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^\alpha)](\alpha) = 1$
- théorème 26 ;
donc $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- théorème 56.

D'autre part :
Quel que soit γ différent de α, $[S_{0,N}(p^\alpha)](\gamma) = 0$
- théorème 26 ;
donc quel que soit γ différent de α, $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\gamma, \Delta^A) = 0$
- théorème 56 ;
donc, puisqu'à α correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(P^A p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(7).

Par conséquent, $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(P^A p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$;
$S^A_{1,N}(p^\alpha)$ n'a donc pas pour conséquence $S^A_{1,N}(P^A p^\alpha)$.

60.(6).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à β différent de α correspond le permis dans Δ^A.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^\alpha)](\alpha) = 1$
- théorème 26 ;
donc $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- théorème 56.

D'autre part :
Puisque β est par hypothèse différent de α, $[S_{0,N}(p^\alpha)](\beta) = 0$
- théorème 26 ;

donc $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, \Delta^{A}) = 0$
- théorème 56 ;
donc, puisqu'à β correspond par hypothèse le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$
- définition 55.(8).

Par conséquent, $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$;
$S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})$ n'a donc pas pour conséquence $S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})$.

60.(7).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^{A}) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à β différent de α correspond le permis dans Δ^{A}.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^{\beta})](\beta) = 1$
- théorème 26 ;
donc $[S^{A}_{1,N}(p^{\beta})](\beta, \Delta^{A}) = 1$
- théorème 56 ;
donc, puisqu'à β correspond par hypothèse le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\beta})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(7).

D'autre part :
Puisque β est par hypothèse différent de α, $[S_{0,N}(p^{\beta})](\alpha) = 0$
- théorème 26 ;
donc $[S^{A}_{1,N}(p^{\beta})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$
- théorème 56.

Par conséquent, $[S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\beta})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(p^{\beta})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$;
$S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\beta})$ n'a donc pas pour conséquence $S^{A}_{1,N}(p^{\beta})$.

60.(8).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^{A}) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à α et à β, différent de α, correspond le permis dans Δ^{A}.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^{\alpha})](\alpha) = 1$
- théorème 26 ;
donc $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- théorème 56 ;
donc, puisqu'à α correspond par hypothèse le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$
- définition 55.(7).

D'autre part :

Puisque β est par hypothèse différent de α, $[S_{0,N}(p^{\alpha})](\beta) = 0$

- théorème 26 ;

donc $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, \Delta^{A}) = 0$

- théorème 56 ;

donc, puisqu'à β correspond par hypothèse le permis dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$

- définition 55.(8).

Par conséquent, $[S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$;

$S^{A}_{1,N}(P^{A}p^{\alpha})$ n'a donc pas pour conséquence $S^{A}_{1,N}(O^{A}p^{\alpha})$.

60.(9).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^{A}) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à α correspond l'interdit dans Δ^{A}.

D'une part :

Quel que soit γ différent de α, $[S_{0,N}(p^{\alpha})](\gamma) = 0$

- théorème 26 ;

donc quel que soit γ différent de α, $[S_{0,N}(\neg p^{\alpha})](\gamma) = 1$

- définition 21.(4) ;

donc quel que soit γ différent de α, $[S^{A}_{1,N}(\neg p^{\alpha})](\gamma, \Delta^{A}) = 1$

- théorème 56 ;

donc, puisqu'à α correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^{A}, $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\neg p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$

- définition 55.(8).

D'autre part :

$[S_{0,N}(p^{\alpha})](\alpha) = 1$

- théorème 26 ;

donc $[S_{0,N}(\neg p^{\alpha})](\alpha) = 0$

- définition 21.(4) ;

donc $[S^{A}_{1,N}(\neg p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$

- théorème 56.

Par conséquent, $[S^{A}_{1,N}(O^{A}\neg p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(\neg p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{A}) = 0$;

$S^{A}_{1,N}(O^{A}\neg p^{\alpha})$ n'a donc pas pour conséquence $S^{A}_{1,N}(\neg p^{\alpha})$.

60.(10).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^{A}) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à chaque configuration aléthique correspond l'interdit dans Δ^{A}.

D'une part :
Puisqu'à chaque configuration aléthique correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(O^A\bot)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8).

D'autre part :
Puisqu'à chaque configuration aléthique correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(P^A\bot)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(7).

$S^A_{1,N}(O^A\bot)$ n'a donc pas pour conséquence $S^A_{1,N}(P^A\bot)$.

60.(11).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N\cup\{A\}$ telle qu'à α et à β, différent de α, correspond le permis dans Δ^A.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^\alpha)](\alpha) = 1$ et, puisque β est par hypothèse différent de α, $[S_{0,N}(p^\alpha)](\beta) = 0$
- théorème 26 ;
donc $[S_{0,N}(p^\alpha)](\alpha) = 1$ et $[S_{0,N}(\neg p^\alpha)](\beta) = 1$
- définition 21.(4) ;
donc $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(\neg p^\alpha)](\beta, \Delta^A) = 1$
- théorème 56 ;
donc, puisqu'à α et à β correspond par hypothèse le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(P^A p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(P^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
donc $[S^A_{1,N}(P^A p^\alpha \wedge P^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5).

D'autre part :
Quel que soit γ, $[S_{0,N}(p^\alpha \wedge \neg p^\alpha)](\gamma) = 0$
- théorème 23.(1) et définition 21.(3) ;
donc quel que soit γ, $[S^A_{1,N}(p^\alpha \wedge \neg p^\alpha)](\gamma, \Delta^A) = 0$
- théorème 56 ;
donc $[S^A_{1,N}(P^A(p^\alpha \wedge \neg p^\alpha))](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(7).

Par conséquent, $[S^A_{1,N}(P^A p^\alpha \wedge P^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(P^A(p^\alpha \wedge \neg p^\alpha))](\alpha, \Delta^A) = 0$;
$S^A_{1,N}(P^A p^\alpha \wedge P^A \neg p^\alpha)$ n'a donc pas pour conséquence $S^A_{1,N}(P^A(p^\alpha \wedge \neg p^\alpha))$.

60.(12).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à α et à β, différent de α, correspond le permis dans Δ^A.

D'une part :
Quel que soit γ, $[S_{0,N}(p^\alpha \vee \neg p^\alpha)](\gamma) = 1$
  - théorème 23.(2) et définition 21.(2) ;
donc quel que soit γ, $[S^A_{1,N}(p^\alpha \vee \neg p^\alpha)](\gamma, \Delta^A) = 1$
  - théorème 56 ;
donc $[S^A_{1,N}(O^A(p^\alpha \vee \neg p^\alpha))](\alpha, \Delta^A) = 1$
  - définition 55.(8).

D'autre part :
$[S_{0,N}(p^\alpha)](\beta) = 0$, puisque β est par hypothèse différent de α, et $[S_{0,N}(p^\alpha)](\alpha) = 1$
  - théorème 26 ;
donc $[S_{0,N}(p^\alpha)](\beta) = 0$ et $[S_{0,N}(\neg p^\alpha)](\alpha) = 0$
  - définition 21.(4) ;
donc $[S^A_{1,N}(p^\alpha)](\beta, \Delta^A) = 0$ et $[S^A_{1,N}(\neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$
  - théorème 56 ;
donc, puisqu'à β et à α correspond par hypothèse le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(O^A p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$ et $[S^A_{1,N}(O^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$
  - définition 55.(8) ;
donc $[S^A_{1,N}(O^A p^\alpha \vee O^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$
  - définition 55.(6).

Par conséquent, $[S^A_{1,N}(O^A(p^\alpha \vee \neg p^\alpha))](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(O^A p^\alpha \vee O^A \neg p^\alpha)](\alpha, \Delta^A) = 0$;
$S^A_{1,N}(O^A(p^\alpha \vee \neg p^\alpha))$ n'a donc pas pour conséquence $S^A_{1,N}(O^A p^\alpha \vee O^A \neg p^\alpha)$. ■

61. *Théorème.*

Pour tout φ et tout ψ de $L_1(N \cup \{A\})$:

(1)	$S^A_{1,N}(P^A\bot)$	est identique à	$S^A_{1,N}(\bot)$,
(2)	$S^A_{1,N}(O^A\top)$	est identique à	$S^A_{1,N}(\top)$,
(3)	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(\neg P^A \neg \varphi)$,
(4)	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(\neg O^A \neg \varphi)$,
(5)	$S^A_{1,N}[P^A(\varphi \vee \psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(P^A\varphi \vee P^A\psi)$,
(6)	$S^A_{1,N}[O^A(\varphi \wedge \psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(O^A\varphi \wedge O^A\psi)$,
(7)	$S^A_{1,N}(P^AP^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(P^A\varphi)$,
(8)	$S^A_{1,N}(O^AO^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(O^A\varphi)$,

(9) $S^A_{1,N}(O^AP^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(O^A\bot \vee P^A\varphi)$,
(10) $S^A_{1,N}(P^AO^A\varphi)$	est identique à	$S^A_{1,N}(P^A\top \wedge O^A\varphi)$,
(11) $S^A_{1,N}[P^A(\varphi \wedge P^A\psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge P^A\psi)$,
(12) $S^A_{1,N}[O^A(\varphi \vee O^A\psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee O^A\psi)$,
(13) $S^A_{1,N}[O^A(\varphi \vee P^A\psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee P^A\psi)$,
(14) $S^A_{1,N}[P^A(\varphi \wedge O^A\psi)]$	est identique à	$S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge O^A\psi)$;
(15) $S^A_{1,N}(O^A\bot)$	est différent de	$S^A_{1,N}(\bot)$,
(16) $S^A_{1,N}(P^A\top)$	est différent de	$S^A_{1,N}(\top)$.

Démonstration.

61.(1).

$[S^A_{1,N}(P^A\bot)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\bot)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(3).

61.(2).

$[S^A_{1,N}(O^A\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\top)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(2).

61.(3).

$[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\neg\varphi)](\beta, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(4) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\neg P^A\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(4).

61.(4).

$[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\neg\varphi)](\beta, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(4) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(\neg O^A\neg\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(4).

61.(5).

$[S^A_{1,N}(P^A(\varphi \vee \psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \vee \psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6) ;
si et seulement si :
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou
pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi \vee P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6).

61.(6).

$[S^A_{1,N}(O^A(\varphi \wedge \psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \wedge \psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5) ;

si et seulement si :
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et
pour chaque (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi \wedge O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5).

61.(7).

$[S^A_{1,N}(P^AP^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
au moins un (γ, Δ^A) est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A et $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7).

61.(8).

$[S^A_{1,N}(O^AO^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
chaque (γ, Δ^A) est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^A, alors $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si
pour chaque (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8).

61.(9).

$[S^A_{1,N}(O^AP^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;

si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
au moins un (γ, Δ^A) est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A et $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si :
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\bot)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou
pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(3) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\bot)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définitions 55.(8) et 55.(7) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\bot \vee P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6).

61.(10).

$[S^A_{1,N}(P^AO^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
chaque (γ, Δ^A) est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^A, alors $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si :
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\top)](\beta, \Delta^A) = 1$ et
pour chaque (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(2) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définitions 55.(7) et 55.(8) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\top \wedge O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5).

61.(11).

$[S^A_{1,N}(P^A(\varphi \wedge P^A\psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \wedge P^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(P^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5) ;

si et seulement si
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A :
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et
au moins un (γ, Δ^A) est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A et $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si :
pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et
pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(7) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(5).

61.(12).
$[S^A_{1,N}(O^A(\varphi \vee O^A\psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \vee O^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(O^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6) ;
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A :
$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou
chaque (γ, Δ^A) est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^A, alors $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si :
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou
pour chaque (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;
si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(6).

61.(13).
$[S^A_{1,N}(O^A(\varphi \vee P^A\psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$
si et seulement si
pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \vee P^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8) ;

si et seulement si

pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,

$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(P^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(6) ;

si et seulement si

pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A :

$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou

au moins un (γ, Δ^A) est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A et $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(7) ;

si et seulement si :

pour chaque (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et/ou

pour au moins un (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;

si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et/ou $[S^A_{1,N}(P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$

- définitions 55.(8) et 55.(7) ;

si et seulement si $[S^A_{1,N}(O^A\varphi \vee P^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(6).

61.(14).

$[S^A_{1,N}(P^A(\varphi \wedge O^A\psi))](\alpha, \Delta^A) = 1$

si et seulement si

pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi \wedge O^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(7) ;

si et seulement si

pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A,

$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(O^A\psi)](\beta, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(5) ;

si et seulement si

pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A :

$[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et

chaque (γ, Δ^A) est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^A, alors $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(8) ;

si et seulement si :

pour au moins un (β, Δ^A) tel qu'à β correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^A) = 1$ et

pour chaque (γ, Δ^A) tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^A, $[S^A_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^A) = 1$;

si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi)](\alpha, \Delta^A) = 1$ et $[S^A_{1,N}(O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$

- définitions 55.(7) et 55.(8) ;

si et seulement si $[S^A_{1,N}(P^A\varphi \wedge O^A\psi)](\alpha, \Delta^A) = 1$

- définition 55.(5).

61.(15).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à chaque configuration aléthique correspond l'interdit dans Δ^A.

D'une part :
Puisqu'à chaque configuration aléthique correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(O^A\bot)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(8).

D'autre part :
$[S^A_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(3).

$S^A_{1,N}(O^A\bot)$ est donc différent de $S^A_{1,N}(\bot)$.

61.(16).

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$ telle qu'à chaque configuration aléthique correspond l'interdit dans Δ^A.

D'une part :
Puisqu'à chaque configuration aléthique correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^A,
$[S^A_{1,N}(P^A\top)](\alpha, \Delta^A) = 0$
- définition 55.(7).

D'autre part :
$[S^A_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^A) = 1$
- définition 55.(2).

$S^A_{1,N}(P^A\top)$ est donc différent de $S^A_{1,N}(\top)$. ■

Nous avons vu (définition 55) que toute formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$ symbolise une fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$. Réciproquement, nous allons démontrer (théorème 67) que *quelle que soit* la fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$, il existe au moins une formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$ qui la symbolise.

Nous introduisons à cette fin les notations suivantes :

Soit l'ensemble Δ^A [l'ensemble Δ^A] des configurations aléthiques γ de N auxquelles correspond le permis [l'interdit] dans la configuration déontique Δ^A de $N \cup \{A\}$.

La notation "p_{Δ^A}" désigne la formule $(\bigwedge_{\Delta^A} P^A p^\gamma) \wedge (\bigwedge_{\Delta^A} \neg P^A p^\gamma)$ de $L_1(N \cup \{A\})$.

Premier exemple : les quatre formules $p_{\Delta_j^A}$ de $L_1(\{p, A\})$.

$$p_{\Delta_1^A} : \quad P^A p \wedge P^A \neg p$$
$$p_{\Delta_2^A} : \quad P^A p \wedge \neg P^A \neg p$$
$$p_{\Delta_3^A} : \quad \neg P^A p \wedge P^A \neg p$$
$$p_{\Delta_4^A} : \quad \neg P^A p \wedge \neg P^A \neg p$$

Deuxième exemple : les seize formules $p_{\Delta_j^A}$ de $L_1(\{p, q, A\})$.

$$p_{\Delta_1^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_2^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_3^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_4^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_5^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_6^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_7^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_8^A} : \quad P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_9^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{10}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{11}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{12}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{13}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{14}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{15}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge P^A(\neg p \wedge \neg q)$$
$$p_{\Delta_{16}^A} : \quad \neg P^A(p \wedge q) \wedge \neg P^A(p \wedge \neg q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge q) \wedge \neg P^A(\neg p \wedge \neg q)$$

Soit une configuration aléthico-déontique (α, Δ^A) de $N \cup \{A\}$.

La notation "$p^{\alpha}_{\Delta^A}$" désigne la formule $p^{\alpha} \wedge p_{\Delta^A}$ de $L_1(N \cup \{A\})$.

Exemple : les huit formules $p^{\alpha_i}_{\Delta^A_j}$ de $L_1(\{p, A\})$.

$p^{\alpha_1}_{\Delta^A_1}$:	$p \wedge P^A p \wedge P^A \neg p$
$p^{\alpha_2}_{\Delta^A_1}$:	$\neg p \wedge P^A p \wedge P^A \neg p$
$p^{\alpha_1}_{\Delta^A_2}$:	$p \wedge P^A p \wedge \neg P^A \neg p$
$p^{\alpha_2}_{\Delta^A_2}$:	$\neg p \wedge P^A p \wedge \neg P^A \neg p$
$p^{\alpha_1}_{\Delta^A_3}$:	$p \wedge \neg P^A p \wedge P^A \neg p$
$p^{\alpha_2}_{\Delta^A_3}$:	$\neg p \wedge \neg P^A p \wedge P^A \neg p$
$p^{\alpha_1}_{\Delta^A_4}$:	$p \wedge \neg P^A p \wedge \neg P^A \neg p$
$p^{\alpha_2}_{\Delta^A_4}$:	$\neg p \wedge \neg P^A p \wedge \neg P^A \neg p$

62. *Définition*. **Conjonction complète de $L_1(N \cup \{A\})$.**
Formule $p^{\alpha}_{\Delta^A}$ de $L_1(N \cup \{A\})$, (α, Δ^A) étant n'importe quelle configuration aléthico-déontique de $N \cup \{A\}$.

63. *Théorème*. Le nombre des conjonctions complètes de $L_1(N \cup \{A\})$ est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(2^n)}$.

Démonstration.

Par la définition 62, il existe autant de conjonctions complètes de $L_1(N \cup \{A\})$ que de configurations aléthico-déontiques de $N \cup \{A\}$, à savoir $2^n \times 2^{(2^n)}$. ■

64. *Théorème*.

Quelle que soit la fonction de vérité singulière $f_{(\alpha, \Delta^A)}$ sur $E_1(N \cup \{A\})$, il existe une et une seule conjonction complète de $L_1(N \cup \{A\})$ qui la symbolise : $p^{\alpha}_{\Delta^A}$.

Démonstration.

$[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

si et seulement si $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha} \wedge p_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$;

si et seulement si $[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, E^A) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(p_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

- définition 55.(5).

Or d'une part :

$[S^{A}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, E^A) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(p^{\alpha})](\beta) = 1$

- théorème 56 ;

si et seulement si β est identique à α

- théorème 26.

D'autre part :

$[S^{A}_{1,N}(p_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

si et seulement si $[S^{A}_{1,N}((\bigwedge_{\Delta^A} P^A p^{\gamma}) \wedge (\bigwedge_{\Delta^A} \neg P^A p^{\gamma}))](\beta, E^A) = 1$;

si et seulement si $[S^{A}_{1,N}(\bigwedge_{\Delta^A} P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 1$ et $[S^{A}_{1,N}(\bigwedge_{\Delta^A} \neg P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 1$

- définition 55.(5) ;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, $[S^{A}_{1,N}(P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^A, $[S^{A}_{1,N}(\neg P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 1$;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, $[S^{A}_{1,N}(P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^A, $[S^{A}_{1,N}(P^A p^{\gamma})](\beta, E^A) = 0$

- définition 55.(4) ;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, au moins un δ dans E^A est tel que $[S^{A}_{1,N}(p^{\gamma})](\delta, E^A) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^A, chaque δ dans E^A est tel que $[S^{A}_{1,N}(p^{\gamma})](\delta, E^A) = 0$

- définition 55.(7) ;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, au moins un δ dans E^A est tel que $[S_{0,N}(p^{\gamma})](\delta) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^A, chaque δ dans E^A est tel que $[S_{0,N}(p^{\gamma})](\delta) = 0$

- théorème 56 ;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, au moins un δ dans E^A est identique à γ et

pour chaque γ dans Δ^A, chaque δ dans E^A est différent de γ

- théorème 26 ;

si et seulement si :

pour chaque γ dans Δ^A, γ est dans E^A et

pour chaque γ dans Δ^A, γ est dans E^A ;

si et seulement si E^A est identique à Δ^A

- définitions 33 et 34.

Par conséquent, $[S^A_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

si et seulement si (β, E^A) est identique à (α, Δ^A)

- définition 35 ;

si et seulement si $f_{(\alpha, \Delta^A)}(\beta, E^A) = 1$

- définition 50.

Les fonctions de vérité $f_{(\alpha, \Delta^A)}$ et $S^A_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^A})$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule $p^{\alpha}_{\Delta^A}$ symbolise bien la fonction de vérité $f_{(\alpha, \Delta^A)}$ sur $E_1(N\cup\{A\})$. ■

65. *Définition*. **Disjonction canonique de $L_1(N\cup\{A\})$.**

Formule $\bigvee_X p^{\alpha}_{\Delta^A}$ de $L_1(N\cup\{A\})$, X étant n'importe quel ensemble de configurations aléthico-déontiques de $N\cup\{A\}$.

66. *Théorème*. Le nombre des disjonctions canoniques de $L_1(N\cup\{A\})$ est *fini* : il en existe $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$.

Démonstration.

Par la définition 65, il existe autant de disjonctions canoniques de $L_1(N\cup\{A\})$ que d'ensembles de configurations aléthico-déontiques de $N\cup\{A\}$, à savoir $2^{(2^n \times 2^{(2^n)})}$. ■

67. *Théorème de forme normale disjonctive complète*.

Quelle que soit la fonction de vérité f sur $E_1(N\cup\{A\})$, il existe une et une seule disjonction canonique de $L_1(N\cup\{A\})$ qui la symbolise : $\bigvee_{\{(\alpha, \Delta^A) : f(\alpha, \Delta^A) = 1\}} p^{\alpha}_{\Delta^A}$.

Démonstration.

$[S^A_{1,N}(\bigvee_{\{(\alpha, \Delta^A) : f(\alpha, \Delta^A) = 1\}} p^{\alpha}_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

si et seulement si pour au moins un (α, Δ^A) tel que $f(\alpha, \Delta^A) = 1$, $[S^A_{1,N}(p^\alpha_{\Delta^A})](\beta, E^A) = 1$

- définition 55.(6) ;

si et seulement si pour au moins un (α, Δ^A) tel que $f(\alpha, \Delta^A) = 1$, (β, E^A) est identique à (α, Δ^A)

- théorème 64 ;

si et seulement si $f(\beta, E^A) = 1$.

Les fonctions de vérité f et $S^A_{1,N}(\bigvee_{\{(\alpha, \Delta^A) : f(\alpha, \Delta^A) = 1\}} p^\alpha_{\Delta^A})$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule $\bigvee_{\{(\alpha, \Delta^A) : f(\alpha, \Delta^A) = 1\}} p^\alpha_{\Delta^A}$ symbolise bien la fonction de vérité f sur $E_1(N \cup \{A\})$. ■

∴

Deuxième section

LE CAS D'UN ENSEMBLE FINI D'AUTORITÉ(S)

5

De l'objet à la forme : Configuration aléthico-déontique et fonction de vérité

Soit un ensemble *fini* $\mathcal{A}$ formé de m Autorité(s) $A_1, \ldots, A_m$.

68. *Axiome*.

Pour tout nombre entier positif i, il existe au moins un ensemble I formé de i proposition(s) tel que chaque configuration aléthique de I est une action pour chaque Autorité de $\mathcal{A}$.

Soit un tel ensemble *fini* N, formé de n proposition(s).

C'est dans ce cadre propositionnel que nous allons, suivant la méthode présentée dans l'introduction, procéder à la formalisation :

(1) Nous allons définir un concept de fonction de vérité.

(2) Nous relierons ce concept à celui de proposition en admettant que chaque fonction de vérité exprime une proposition.

Ce concept de fonction de vérité s'appuie sur celui de configuration aléthico-déontique de $N \cup \mathcal{A}$, clé du chapitre.

69. *Définition*. **Configuration aléthico-déontique de $N \cup \mathcal{A}$.**

Ensemble formé d'une configuration aléthique de N et, pour *chaque* Autorité A_j de $\mathcal{A}$, d'une configuration déontique de $N \cup \{A_j\}$.

70. *Théorème*. Le nombre des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(m2^n)}$.

Démonstration.

Par les définitions 34 et 69, le nombre des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ est égal au produit du nombre des configurations aléthiques de N (à savoir 2^n) par la $m^{\text{ième}}$ puissance du nombre des configurations déontiques de N (à savoir, l'ensemble $E_0(N)$ étant formé de 2^n éléments, $(2^{(2^n)})^m$).

Le nombre des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ est donc égal à $2^n \times 2^{(m2^n)}$. ■

71. *Définition*. **L'espace aléthico-déontique $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**
La *totalité* des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$.

72. *Définition*. **Le voisinage d'une configuration aléthico-déontique $(\alpha\,;\,\Delta^{A_1}, \ldots, \Delta^{A_m})$ de $N \cup \mathcal{A}$.**

L'ensemble formé des configurations aléthico-déontiques $(\beta\,;\,\Delta^{A_1}, \ldots, \Delta^{A_m})$ de $N \cup \mathcal{A}$, β étant n'importe quelle configuration aléthique de N.

73. *Théorème*.

Les voisinages des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ forment une partition de l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$ en $2^{(m2^n)}$ parties équipotentes.

Démonstration.

Primo, par la définition 72, chaque voisinage est formé d'autant d'éléments que de configurations aléthiques de N, à savoir 2^n.

Secundo, par la définition 72, chaque configuration aléthico-déontique de $N \cup \mathcal{A}$ est dans son voisinage.

Tertio, si $V = \{(\beta\,;\,\Delta^{A_1}, \ldots, \Delta^{A_m}), \beta$ dans $E_0(N)\}$ et $W = \{(\gamma\,;\,E^{A_1}, \ldots, E^{A_m}), \gamma$ dans $E_0(N)\}$ sont deux voisinages, alors :
soit pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$, E^{A_j} est identique à Δ^{A_j}, et donc V et W sont identiques,
soit pour au moins une Autorité A_j de $\mathcal{A}$, E^{A_j} est différent de Δ^{A_j}, et donc V et W ont une intersection vide.

Par conséquent, les voisinages des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ forment bien une partition de l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$ en $2^{(m2^n)}$ parties équipotentes. ■

Venons-en alors au concept de fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.

74. *Définition*. **Fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**

Fonction telle qu'à *chaque* élément de $E_1(N \cup \mathcal{A})$ correspond soit le vrai soit le faux.

Table d'une fonction de vérité f sur $E_1(\{p, A, B\})$.

Dans la colonne de gauche sont représentées les trente-deux configurations aléthico-déontiques de $\{p, A, B\}$ et, à leur droite, la valeur qui leur correspond par la fonction de vérité f.

$(\alpha ; \Delta^A, \Delta^B)$	f
$(\alpha_1 ; \Delta^A_1, \Delta^B_1)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_1, \Delta^B_1)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_1, \Delta^B_2)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_1, \Delta^B_2)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_1, \Delta^B_3)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_1, \Delta^B_3)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_1, \Delta^B_4)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_1, \Delta^B_4)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_2, \Delta^B_1)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_2, \Delta^B_1)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_2, \Delta^B_2)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_2, \Delta^B_2)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_2, \Delta^B_3)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_2, \Delta^B_3)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_2, \Delta^B_4)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_2, \Delta^B_4)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_3, \Delta^B_1)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_3, \Delta^B_1)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_3, \Delta^B_2)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_3, \Delta^B_2)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_3, \Delta^B_3)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_3, \Delta^B_3)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_3, \Delta^B_4)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_3, \Delta^B_4)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_4, \Delta^B_1)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_4, \Delta^B_1)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_1 ; \Delta^A_4, \Delta^B_2)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_4, \Delta^B_2)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{green}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_4, \Delta^B_3)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	1
$(\alpha_2 ; \Delta^A_4, \Delta^B_3)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{green}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_1 ; \Delta^A_4, \Delta^B_4)$: $\{\{\underline{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	0
$(\alpha_2 ; \Delta^A_4, \Delta^B_4)$: $\{\{\bar{p}\}, \{A, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}, \{B, {\color{red}\{\underline{p}\}}, {\color{red}\{\bar{p}\}}\}\}$	1

75. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est *fini* : il en existe $2^{(2^n \times 2^{(m2^n)})}$.

Démonstration.

Par le théorème 70, l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est formé de $2^n \times 2^{(m2^n)}$ éléments, il existe donc, par la définition 74, $2^{(2^n \times 2^{(m2^n)})}$ fonctions de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$. ■

76. *Définition*. **L'espace fonctionnel $\mathcal{E}_1(N \cup \mathcal{A})$.**
La *totalité* des fonctions de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.

77. *Axiome*.

Chaque fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ exprime une proposition.

Cet axiome *justifie* l'énoncé 74.

78. *Définition*. **L'extension d'une fonction de vérité f sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**

L'ensemble des configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$ auxquelles correspond le vrai par la fonction de vérité f.

79. *Définition*. **La fonction de vérité tautologique sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**
La fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ dont l'extension est l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$.

80. *Définition*. **La fonction de vérité contradictoire sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**
La fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ dont l'extension est l'ensemble vide.

81. *Définition*. **Conséquence d'une fonction de vérité f sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.**
Fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ dont l'extension inclut celle de la fonction de vérité f sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.

82. *Théorème*. Chaque fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est conséquence d'elle-même.

Démonstration.

C'est immédiat par la définition 81. ■

83. *Théorème*. Si les fonctions de vérité f et g sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ sont conséquences l'une de l'autre, elles sont identiques.

Démonstration.

Si les fonctions de vérité f et g sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ sont conséquences l'une de l'autre, elles ont, par la définition 81, même extension ; elles sont donc, par la définition 78, identiques. ■

Soit une configuration aléthico-déontique $(\alpha\ ;\ \Delta^{A_1}, \ldots, \Delta^{A_m})$, en abrégé "$(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$", de $N \cup \mathcal{A}$.

84. *Définition*. **La fonction de vérité singulière $\mathbf{f}_{(\alpha,\, \Delta^{\mathcal{A}})}$ sur $\mathbf{E_1(N \cup \mathcal{A})}$.**

La fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ dont l'extension est le singleton $\{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})\}$.

Autrement dit, la table de la fonction de vérité $f_{(\alpha,\, \Delta^{\mathcal{A}})}$ ne compte qu'un seul "1", et précisément sur la ligne où est représentée la configuration $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$.

85. *Théorème*. Le nombre des fonctions de vérité singulières sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(m2^n)}$.

Démonstration.

Par les définitions 78 et 84, il existe autant de fonctions de vérité singulières sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ que de configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$, à savoir $2^n \times 2^{(m2^n)}$. ■

6

De la forme au symbole : Formule aléthico-déontique et sémantique aléthico-déontique

Pour la troisième et dernière fois, nous allons procéder à une symbolisation :

(1) Nous allons définir le concept de formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$.

(2) Nous relierons ce concept à celui de fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ en définissant par récurrence une fonction, la sémantique aléthico-déontique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$, telle qu'à *toute* formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$ correspond une fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$.

Le concept de formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$ s'appuie sur le concept suivant :

86. *Définition*. **L'alphabet aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$.**

L'ensemble formé :

(1) des noms des propositions de N ;

(2) des caractères :

“$\top$”, “$\bot$”,

“$\neg$”, “$\wedge$”, “$\vee$”,

“P^{A_1}” (comme “Permission par A_1”), “O^{A_1}” (comme “Obligation par A_1”), …,

“P^{A_m}” (comme “Permission par A_m”), “O^{A_m}” (comme “Obligation par A_m”) ;

(3) des caractères “(” et “)”.

87. *Définition*. **Formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$.**

(1) Soit le nom d'une proposition de N ;

(2) soit “$\top$”, soit “$\bot$” ;

(3) soit $\neg\varphi$, soit $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$, soit $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)$, soit $P^{A_j}\varphi$, soit $O^{A_j}\varphi$,
$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ étant des formules aléthico-déontiques sur $N \cup \mathcal{A}$,
et “A_j”, le nom d'une Autorité de $\mathcal{A}$.

88. *Définition*. **Le langage aléthico-déontique $L_1(N \cup \mathcal{A})$.**

L'ensemble des formules aléthico-déontiques sur $N \cup \mathcal{A}$.

Exemples de formules de $L_1(\{p, q, A, B\})$.

$\top$, $(q \vee \top) \wedge p$, $O^A(\neg q \wedge p)$, $q \vee P^B\neg q$, $P^BO^BO^Ap$, $P^Aq \wedge \neg P^Bq$, $\neg P^B(P^Aq \wedge \neg p) \vee (p \wedge O^Bq)$.[16]

Nous présupposons que nulle formule de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ n'est ambiguë. Par exemple, “A_j” ($1 \leq j \leq m$) n'est le nom d'aucune proposition de N.

Cela dit, soit une proposition p de N, des formules $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ et une configuration aléthico-déontique $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ de $N\cup\mathcal{A}$.

89. *Définition (par récurrence).* **La sémantique aléthico-déontique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$.**

La fonction de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ dans $\mathcal{E}_1(N\cup\mathcal{A})$ telle que :

(1) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α ;

(2) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

(3) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$;

(4) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\neg\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$;

(5) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si pour chaque i, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

(6) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_k)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si pour au moins un i, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

(7) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

(8) $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$.

Nous disons à nouveau que toute formule de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ symbolise une fonction de vérité sur $E_1(N\cup\mathcal{A})$.

À propos de cette définition, clé du chapitre, remarquons bien ceci :

(1) Ici aussi l'égalité en un point[17] des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\neg\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\neg\psi)$.

(2) Pareillement, l'égalité en un même point, pour chaque i, des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_i)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi_i)$ implique l'égalité en ce point des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_k)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi_1\wedge\dots\wedge\psi_k)$, ainsi que celle des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1\vee\dots\vee\varphi_k)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi_1\vee\dots\vee\psi_k)$.

---

16 Nous écrivons “$(q \vee \top) \wedge p$”, “$q \vee P^B\neg q$”, “$P^Aq \wedge \neg P^Bq$” et “$\neg P^B(P^Aq \wedge \neg p) \vee (p \wedge O^Bq)$” respectivement pour “$((q \vee \top) \wedge p)$”, “$(q \vee P^B\neg q)$”, “$(P^Aq \wedge \neg P^Bq)$” et “$(\neg P^B(P^Aq \wedge \neg p) \vee (p \wedge O^Bq))$”.

17 À savoir en un élément de l'espace $E_1(N\cup\mathcal{A})$.

(3) Par contre, l'égalité en un point des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)$ n'implique ni l'égalité en ce point, quel que soit j, des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)$, ni celle, quel que soit j, des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)$.

(4) Néanmoins, et c'est important, l'égalité sur le voisinage d'un point des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)$ implique l'égalité sur ce voisinage, pour chaque j, des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)$, ainsi que celle, pour chaque j, des fonctions $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)$.

Nous dirons que la sémantique aléthico-déontique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$ est *intensionnelle*.

La sémantique $S_{0,N}$ *se plonge* dans la sémantique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$, à savoir :

Soit des formules φ et ψ de $L_0(N)$, ainsi qu'une configuration aléthico-déontique $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ de $N \cup \mathcal{A}$.

90. *Théorème*.

Les sémantiques $S_{0,N}$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$ sont telles que $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = [S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$.

Démonstration.

Nous procédons par récurrence sur le langage aléthique $L_0(N)$: il y a trois cas de base et trois cas de récurrence.

Premier cas de base.
$[S_{0,N}(p)](\alpha) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α
- définition 21.(1) ;
$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ si et seulement si à p correspond le vrai dans α
- définition 89.(1) ;
donc $[S_{0,N}(p)](\alpha) = [S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$.

Deuxième cas de base.
$[S_{0,N}(\top)](\alpha) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définitions 21.(2) et 89.(2) ;
donc $[S_{0,N}(\top)](\alpha) = [S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\top)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$.

Troisième cas de base.
$[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = 0$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$
- définitions 21.(3) et 89.(3) ;
donc $[S_{0,N}(\bot)](\alpha) = [S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bot)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$.

Premier cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\neg\varphi)](\alpha) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 0$
- définition 21.(4) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$
- hypothèse de récurrence ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\neg\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(4).

Deuxième cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha) = 1$
si et seulement si pour chaque i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$
- définition 21.(5) ;

si et seulement si pour chaque i, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- hypothèse de récurrence ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(5).

Troisième cas de récurrence.
$[S_{0,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha) = 1$
si et seulement si pour au moins un i, $[S_{0,N}(\varphi_i)](\alpha) = 1$
- définition 21.(6) ;

si et seulement si pour au moins un i, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_i)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- hypothèse de récurrence ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(6). ■

91. *Théorème*. La fonction $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est tautologique si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est tautologique.

Démonstration.

La fonction $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est tautologique
si et seulement si l'extension de $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)$ est l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$
- définition 79 ;

si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) : [S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1\}$ est l'espace $E_1(N \cup \mathcal{A})$
- définition 78 ;

si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$ est l'espace $E_0(N)$
- théorème 90 ;

si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\varphi)$ est l'espace $E_0(N)$
- définition 10 ;

si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est tautologique
- définition 11. ■

92. *Théorème*. La fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est contradictoire si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est contradictoire.

Démonstration.

La fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est contradictoire
si et seulement si l'extension de $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ est l'ensemble vide
- définition 80 ;

si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) : [S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1\}$ est l'ensemble vide
- définition 78 ;

si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$ est l'ensemble vide
- théorème 90 ;

si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\varphi)$ est l'ensemble vide
- définition 10 ;

si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$ est contradictoire
- définition 12. ■

93. *Théorème*. La fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\psi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est conséquence de la fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\psi)$ sur $E_0(N)$ est conséquence de la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$.

Démonstration.

La fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\psi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$ est conséquence de la fonction $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$
si et seulement si l'extension de $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\psi)$ inclut celle de $S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)$
- définition 81 ;

si et seulement si $\{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) : [S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1\}$ inclut $\{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) : [S_{1,N}^{\mathcal{A}}(\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1\}$
- définition 78 ;

si et seulement si $\{\alpha : [S_{0,N}(\psi)](\alpha) = 1\}$ inclut $\{\alpha : [S_{0,N}(\varphi)](\alpha) = 1\}$
- théorème 90 ;

si et seulement si l'extension de $S_{0,N}(\psi)$ inclut celle de $S_{0,N}(\varphi)$
- définition 10 ;

si et seulement si la fonction $S_{0,N}(\psi)$ sur $E_0(N)$ est conséquence de la fonction $S_{0,N}(\varphi)$ sur $E_0(N)$
- définition 13. ■

Là-dessus, nous dressons, formule après formule, *voisinage par voisinage*, la table d'une fonction de vérité sur $E_1(\{p, A, B\})$. Les astérisques [les doubles astérisques] indiquent les configurations aléthico-déontiques (β ; Δ^A, Δ^B) de {p, A, B} telles qu'à β correspond le permis dans Δ^A [dans Δ^B].

Table de la fonction de vérité $S^{\{A,B\}}_{1,\{p\}}(O^A\neg p \wedge P^B p)$ sur $E_1(\{p, A, B\})$.

		$(\alpha\ ;\ \Delta^A, \Delta^B)$		p	$\neg p$	$O^A\neg p$	$P^B p$	$O^A\neg p \wedge P^B p$
*	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	1	**0**
*	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	1	**0**
*	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	1	**0**
*		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	1	**0**
*		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	**0**
*	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	**0**
*		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	**0**
*		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_1, \Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	**0**
*	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	1	**0**
	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	1	**0**
*	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	1	**0**
		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	1	**0**
*		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	**0**
	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	**0**
*		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	0	0	**0**
		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_2, \Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	0	**0**
	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	1	**1**
*	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	1	**1**
	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	1	**1**
*		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	1	**1**
		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	0	**0**
*	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	0	**0**
		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	0	**0**
*		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_3, \Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	0	**0**
	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	1	**1**
	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	1	**1**
	**	$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	1	**1**
		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	1	**1**
		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	0	**0**
	**	$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	0	**0**
		$(\alpha_1\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	0	**0**
		$(\alpha_2\ ;\ \Delta^A_4, \Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\}, \{A, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}, \{B, \{\underline{p}\}, \{\overline{p}\}\}\}$	0	1	1	0	**0**

Ce que nous condensons comme suit :

		$(\alpha\,;\Delta^A,\Delta^B)$		O^A	$\neg$	p	$\wedge$	P^B	p
*	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	1	1
*	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	1	0
*	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	1	1
*		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	1	0
*		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	0	1
*	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	0	0
*		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	0	1
*		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_1,\Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	0	0
*	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	1	1
	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	1	0
*	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	1	1
		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	1	0
*		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	0	1
	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	0	0
*		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	0	1	**0**	0	1
		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_2,\Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	0	1	0	**0**	0	0
	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**1**	1	1
*	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**1**	1	0
	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**1**	1	1
*		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**1**	1	0
		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**0**	0	1
*	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**0**	0	0
		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**0**	0	1
*		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_3,\Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**0**	0	0
	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_1)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**1**	1	1
	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_1)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**1**	1	0
	**	$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_2)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**1**	1	1
		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_2)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**1**	1	0
		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_3)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**0**	0	1
	**	$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_3)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**0**	0	0
		$(\alpha_1\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_4)$:	$\{\{\underline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	0	1	**0**	0	1
		$(\alpha_2\,;\,\Delta^A_4,\Delta^B_4)$:	$\{\{\overline{p}\},\{A,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\},\{B,\{\underline{p}\},\{\overline{p}\}\}\}$	1	1	0	**0**	0	0

Après quoi, toujours en relation avec la sémantique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$, nous présentons au théorème 94, des *équivalences* et *non-équivalences* remarquables.

Supposons que l'ensemble $\mathcal{A}$ est formé d'au moins deux Autorités A_j et A_k.

94. *Théorème*.

Pour tout φ et tout ψ de $L_1(N\cup\mathcal{A})$:

(1) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}P^{A_j}\varphi)$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top\wedge P^{A_j}\varphi)$,
(2) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}O^{A_j}\varphi)$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\bot\vee O^{A_j}\varphi)$,
(3) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}P^{A_j}\varphi)$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\bot\vee P^{A_j}\varphi)$,
(4) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}O^{A_j}\varphi)$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top\wedge O^{A_j}\varphi)$,
(5) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}[P^{A_k}(\varphi\wedge P^{A_j}\psi)]$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi\wedge P^{A_j}\psi)$,
(6) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}[O^{A_k}(\varphi\vee O^{A_j}\psi)]$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi\vee O^{A_j}\psi)$,
(7) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}[O^{A_k}(\varphi\vee P^{A_j}\psi)]$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi\vee P^{A_j}\psi)$,
(8) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}[P^{A_k}(\varphi\wedge O^{A_j}\psi)]$	est identique à	$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi\wedge O^{A_j}\psi)$.

Pour au moins un φ de $L_1(N\cup\mathcal{A})$:

(9) $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi\wedge\neg P^{A_k}\varphi)$ est différent de $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bot)$.

Démonstration.

94.(1).
$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}P^{A_j}\varphi)](\alpha,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
si et seulement si
pour au moins un $(\beta,\Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)](\beta,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
- définition 89.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un $(\beta,\Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},
au moins un $(\gamma,\Delta^{\mathcal{A}})$ est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j} et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
- définition 89.(7) ;
si et seulement si :
pour au moins un $(\beta,\Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\top)](\beta,\Delta^{\mathcal{A}})=1$ et
pour au moins un $(\gamma,\Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
- définition 89.(2) ;
si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top)](\alpha,\Delta^{\mathcal{A}})=1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)](\alpha,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
- définition 89.(7) ;
si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top\wedge P^{A_j}\varphi)](\alpha,\Delta^{\mathcal{A}})=1$
- définition 89.(5).

94.(2).

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, alors $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si :

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\perp)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

pour chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(3) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\perp)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\perp \vee O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6).

94.(3).

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}P^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j} et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si :

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\perp)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

pour au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(3) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\perp)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définitions 89.(8) et 89.(7) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\perp \vee P^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6).

94.(4).

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, alors $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si :

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\top)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et

pour chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(2) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définitions 89.(7) et 89.(8) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\top \wedge O^{A_j}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(5).

94.(5).

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}(\varphi \wedge P^{A_j}\psi))](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi \wedge P^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(5) ;

si et seulement si

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k} :

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et

au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j} et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si :

pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et

pour au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi \wedge P^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(5).

94.(6).

$\left[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}(\varphi \vee O^{A_j}\psi))\right](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi \vee O^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k} :

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, alors $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si :

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

pour chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi \vee O^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6).

94.(7).

$\left[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}(\varphi \vee P^{A_j}\psi))\right](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi \vee P^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(8) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6) ;

si et seulement si

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k} :

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j} et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si :

pour chaque $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou

pour au moins un $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et/ou $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définitions 89.(8) et 89.(7) ;
si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_k}\varphi \vee P^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(6).

94.(8).
$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}(\varphi \wedge O^{A_j}\psi))](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
si et seulement si
pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi \wedge O^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(7) ;
si et seulement si
pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k},
$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(5) ;
si et seulement si
pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k} :
$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et
chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ est tel que si à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, alors $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(8) ;
si et seulement si :
pour au moins un $(\beta, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à β correspond le permis dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\varphi)](\beta, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et
pour chaque $(\gamma, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel qu'à γ correspond le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\psi)](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$;
si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(O^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définitions 89.(7) et 89.(8) ;
si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}\varphi \wedge O^{A_j}\psi)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(5).

94.(9).

Soit une configuration aléthico-déontique $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ de $N \cup \mathcal{A}$ telle qu'à α correspond le permis dans Δ^{A_j} et l'interdit dans Δ^{A_k}.

D'une part :
$[S_{0,N}(p^{\alpha})](\alpha) = 1$ et quel que soit γ différent de α, $[S_{0,N}(p^{\alpha})](\gamma) = 0$
- théorème 26 ;
donc $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et quel que soit γ différent de α, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha})](\gamma, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$
- théorème 90 ;
donc :
puisqu'à α correspond par hypothèse le permis dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et
puisqu'à α correspond par hypothèse l'interdit dans Δ^{A_k}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_k}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$
- définition 89.(7) ;

donc $[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\,P^{A_j}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\,\neg P^{A_k}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(4) ;
donc $[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\,P^{A_j}p^{\alpha} \wedge \neg P^{A_k}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$
- définition 89.(5).

D'autre part :
$[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\perp)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$
- définition 89.(3).

Par conséquent, $[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\,P^{A_j}p^{\alpha} \wedge \neg P^{A_k}p^{\alpha})](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[\,S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\perp)](\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 0$;
$S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\,P^{A_j}p^{\alpha} \wedge \neg P^{A_k}p^{\alpha})$ est donc différent de $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\perp)$. ■

Nous avons vu (définition 89) que toute formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$ symbolise une fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$. Réciproquement, nous allons démontrer (théorème 100) que *quelle que soit* la fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$, il existe au moins une formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$ qui la symbolise.

Nous introduisons à cette fin les notations suivantes :

Soit une configuration aléthico-déontique $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ de $N \cup \mathcal{A}$.

La notation “ $p_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ ” désigne la formule de $L_1(N \cup \mathcal{A})$:
(1) $p_{\Delta^{A_1}}$, si l'ensemble $\mathcal{A}$ est formé du seul élément A_1 ;
(2) $p_{\Delta^{A_1}} \wedge \ldots \wedge p_{\Delta^{A_m}}$, si l'ensemble $\mathcal{A}$ est formé des m ($m \geq 2$) éléments $A_1, \ldots, A_m$.

La notation “ $p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ ” désigne la formule $p^{\alpha} \wedge p_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ de $L_1(N \cup \mathcal{A})$.

95. Conjonction complète de $L_1(N \cup \mathcal{A})$.
Formule $p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ de $L_1(N \cup \mathcal{A})$, $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ étant n'importe quelle configuration aléthico-déontique de $N \cup \mathcal{A}$.

96. *Théorème*. Le nombre des conjonctions complètes de $L_1(N \cup \mathcal{A})$ est *fini* : il en existe $2^n \times 2^{(m2^n)}$.

Démonstration.

Par la définition 95, il existe autant de conjonctions complètes de $L_1(N \cup \mathcal{A})$ que de configurations aléthico-déontiques de $N \cup \mathcal{A}$, à savoir $2^n \times 2^{(m2^n)}$. ■

97. *Théorème.*

Quelle que soit la fonction de vérité singulière $f_{(\alpha,\, \Delta^{\mathcal{A}})}$ sur $E_1(N\cup\mathcal{A})$, il existe une et une seule conjonction complète de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ qui la symbolise : $p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$.

Démonstration.

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha} \wedge p_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(5).

Or d'une part :

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si $[S_{0,N}(p^{\alpha})](\beta) = 1$

- théorème 90 ;

si et seulement si β est identique à α

- théorème 26.

D'autre part :

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p_{\Delta^{A_j}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$,

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}((\bigwedge_{\Delta^{A_j}} P^{A_j}p^{\gamma}) \wedge (\bigwedge_{\Delta^{A_j}} \neg P^{A_j}p^{\gamma}))](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$,

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bigwedge_{\Delta^{A_j}} P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$ et $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bigwedge_{\Delta^{A_j}} \neg P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(5) ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\neg P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(P^{A_j}p^{\gamma})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 0$

- définition 89.(4) ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, au moins un δ dans E^{A_j} est tel que $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\gamma})](\delta, E^{\mathcal{A}}) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, chaque δ dans E^{A_j} est tel que $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\gamma})](\delta, E^{\mathcal{A}}) = 0$

- définition 89.(7) ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, au moins un δ dans E^{A_j} est tel que $[S_{0,N}(p^{\gamma})](\delta) = 1$ et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, chaque δ dans E^{A_j} est tel que $[S_{0,N}(p^{\gamma})](\delta) = 0$

- théorème 90 ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, au moins un δ dans E^{A_j} est identique à γ et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, chaque δ dans E^{A_j} est différent de γ

- théorème 26 ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$:

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, γ est dans E^{A_j} et

pour chaque γ dans Δ^{A_j}, γ est dans E^{A_j} ;

si et seulement si pour chaque Autorité A_j de $\mathcal{A}$, E^{A_j} est identique à Δ^{A_j}

- définitions 33 et 34.

Par conséquent, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si $(\beta, E^{\mathcal{A}})$ est identique à $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$

- définition 69 ;

si et seulement si $f_{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})}(\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 84.

Les fonctions de vérité $f_{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})}$ et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule $p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ symbolise bien la fonction de vérité $f_{(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})}$ sur $E_1(N\cup\mathcal{A})$. ■

98. Disjonction canonique de $L_1(N\cup\mathcal{A})$.

Formule $\bigvee_{X} p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ de $L_1(N\cup\mathcal{A})$, X étant n'importe quel ensemble de configurations aléthico-déontiques de $N\cup\mathcal{A}$.

99. *Théorème*. Le nombre des disjonctions canoniques de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ est *fini* : il en existe $2^{(2^n \times 2^{(m2^n)})}$.

Démonstration.

Par la définition 98, il existe autant de disjonctions canoniques de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ que d'ensembles de configurations aléthico-déontiques de $N\cup\mathcal{A}$, à savoir $2^{(2^n \times 2^{(m2^n)})}$. ■

100. *Théorème de forme normale disjonctive complète*.

Quelle que soit la fonction de vérité f sur $E_1(N\cup\mathcal{A})$, il existe une et une seule disjonction canonique de $L_1(N\cup\mathcal{A})$ qui la symbolise : $\bigvee_{\{(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,:\,f(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,=\,1\}} p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$.

Démonstration.

$[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bigvee_{\{(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,:\,f(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,=\,1\}} p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

si et seulement si pour au moins un $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel que $f(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$, $[S^{\mathcal{A}}_{1,N}(p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})](\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$

- définition 89.(6) ;

si et seulement si pour au moins un $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$ tel que $f(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}}) = 1$, $(\beta, E^{\mathcal{A}})$ est identique à $(\alpha, \Delta^{\mathcal{A}})$

- théorème 97 ;

si et seulement si $f(\beta, E^{\mathcal{A}}) = 1$.

Les fonctions de vérité f et $S^{\mathcal{A}}_{1,N}(\bigvee_{\{(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,:\,f(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,=\,1\}} p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}})$ sont donc identiques ; en d'autres termes, la formule $\bigvee_{\{(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,:\,f(\alpha,\,\Delta^{\mathcal{A}})\,=\,1\}} p^{\alpha}_{\Delta^{\mathcal{A}}}$ symbolise bien la fonction de vérité f sur $E_1(N\cup\mathcal{A})$. ■

∴

Conclusion

Arrivé à la fin du texte, nous le récapitulons par les deux tableaux qui suivent, témoignant, chacun à sa façon, du *parallélisme* de nos logiques.

Le parallélisme : les quatre définitions cardinales.

Logique aléthique	**Logique aléthico-déontique, une autorité**	**Logique aléthico-déontique, un ensemble fini d'autorité(s)**
Configuration aléthique de N	Configuration aléthico-déontique de $N \cup \{A\}$	Configuration aléthico-déontique de $N \cup \mathcal{A}$
Fonction de vérité sur $E_0(N)$	Fonction de vérité sur $E_1(N \cup \{A\})$	Fonction de vérité sur $E_1(N \cup \mathcal{A})$
Formule aléthique sur N	Formule aléthico-déontique sur $N \cup \{A\}$	Formule aléthico-déontique sur $N \cup \mathcal{A}$
La sémantique aléthique $S_{0,N}$	La sémantique aléthico-déontique $S^{A}_{1,N}$	La sémantique aléthico-déontique $S^{\mathcal{A}}_{1,N}$

Le parallélisme : point par point.[18]

Première partie	**Seconde partie, première section**	**Seconde partie, deuxième section**
Axiome 2	Axiome 32	Axiome 68
Définition 3	*Définition 35*	*Définition 69*
Théorème 4	Théorème 36	Théorème 70
Définition 5	Définition 37	Définition 71
Définition 6	*Définition 40*	*Définition 74*
Théorème 7	Théorème 41	Théorème 75
Définition 8	Définition 42	Définition 76
Axiome 9	Axiome 43	Axiome 77
Définition 10	Définition 44	Définition 78
Définition 11	Définition 45	Définition 79
Définition 12	Définition 46	Définition 80
Définition 13	Définition 47	Définition 81
Théorème 14	Théorème 48	Théorème 82
Théorème 15	Théorème 49	Théorème 83
Définition 16	Définition 50	Définition 84
Théorème 17	Théorème 51	Théorème 85
Définition 18	Définition 52	Définition 86
Définition 19	*Définition 53*	*Définition 87*
Définition 20	Définition 54	Définition 88
Définition 21	*Définition 55*	*Définition 89*
Définition 24	Définition 62	Définition 95
Théorème 25	Théorème 63	Théorème 96
Théorème 26	Théorème 64	Théorème 97
Définition 27	Définition 65	Définition 98
Théorème 28	Théorème 66	Théorème 99
Théorème 29	Théorème 67	Théorème 100

∴

18 Les quatre définitions cardinales sont indiquées en italique.

Extraits de la Convention ONU sur la signalisation routière

Chapitre premier

GÉNÉRALITÉS

ARTICLE PREMIER

Définitions

Pour l'application des dispositions de la présente Convention, les termes ci-après auront le sens qui leur est donné dans le présent article :
a) Le terme «législation nationale» d'une Partie contractante désigne l'ensemble des lois et règlements nationaux ou locaux en vigueur sur le territoire de cette Partie contractante ;
c) Le terme «route» désigne toute l'emprise de tout chemin ou rue ouvert à la circulation publique ;
f) Le terme «intersection» désigne toute croisée à niveau, jonction ou bifurcation de routes, y compris les places formées par de telles croisées, jonctions ou bifurcations ;
q) Le terme «conducteur» désigne toute personne qui assume la direction d'un véhicule, automobile ou autre (cycle compris), ou qui, sur une route, guide des bestiaux, isolés ou en troupeaux, ou des animaux de trait, de charge ou de selle.

ARTICLE 2

Annexes de la Convention

Les annexes de la présente Convention, savoir :
L'annexe 4 : Signaux de réglementation à l'exception de ceux qui concernent la priorité, l'arrêt et le stationnement,
L'annexe 9 : Reproduction en couleur des signaux, symboles et panneaux dont il est question dans les annexes 1 à 7.

Chapitre II

SIGNAUX ROUTIERS

ARTICLE 11

Signaux d'interdiction ou de restriction

La section A de l'annexe 4 de la présente Convention décrit les signaux d'interdiction ou de restriction, à l'exception de ceux qui ont trait à l'arrêt ou au stationnement, et donne leur signification.

ARTICLE 12

Signaux d'obligation

La section B de l'annexe 4 de la présente Convention décrit les signaux d'obligation et donne leur signification.

ARTICLE 13

Prescriptions communes aux signaux décrits à l'annexe 4 de la présente Convention

1. Les signaux d'interdiction ou de restriction et les signaux d'obligation seront placés dans le voisinage immédiat de l'endroit où commence l'obligation, la restriction ou l'interdiction.

Annexe 4

SIGNAUX DE RÉGLEMENTATION, À L'EXCEPTION DE CEUX QUI CONCERNENT LA PRIORITÉ, L'ARRÊT ET LE STATIONNEMENT

SECTION A. – SIGNAUX D'INTERDICTION OU DE RESTRICTION

1. *Caractéristiques des signaux et symboles*

a) Les signaux d'interdiction ou de restriction sont circulaires.

b) Sauf les exceptions précisées ci-après à l'occasion de la description des signaux en cause, les signaux d'interdiction ou de restriction sont à fond blanc ou jaune avec large bordure rouge et les symboles ainsi que , s'il en existe, les inscriptions, sont noirs ou de couleur bleu foncé et les barres obliques, s'il en existe, sont rouges et doivent être inclinées de haut en bas en partant de la gauche.

2. *Description des signaux*

a) *Interdiction et restriction d'accès*

ii) Pour notifier que toute circulation de véhicules est interdite dans les deux sens, il sera employé le signal C, 2 «CIRCULATION INTERDITE DANS LES DEUX SENS».

e) *Limitation de vitesse*

Pour notifier une limitation de vitesse, il sera employé le signal C, 14 «VITESSE MAXIMALE LIMITÉE AU CHIFFRE INDIQUÉ». Le chiffre apposé dans le signal indique la vitesse maximale dans l'unité de mesure la plus couramment employée dans le pays pour désigner la vitesse des véhicules. À la suite ou au-dessous du chiffre de la vitesse peut être ajouté, par exemple, «km» (kilomètres) ou «m» (miles).

SECTION B. – SIGNAUX D'OBLIGATION

1. *Caractéristiques générales des signaux et symboles*

a) Les signaux d'obligation sont circulaires.

b) Sauf disposition contraire, les signaux sont de couleur bleue et les symboles sont blancs ou de couleur claire, ou bien les signaux sont blancs avec un listel rouge et les symboles sont noirs.

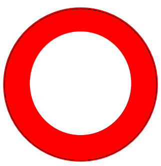
2. *Description des signaux*

g) *Vitesse minimale obligatoire*

Le signal D, 7 «VITESSE MINIMALE OBLIGATOIRE» notifie que les véhicules circulant sur la route à l'entrée de laquelle il est placé sont tenus de circuler au moins à la vitesse indiquée ; le chiffre apposé dans le signal indique cette vitesse dans l'unité de mesure la plus couramment employée dans le pays pour désigner la vitesse des véhicules. À la suite du chiffre de la vitesse peut être ajouté, par exemple, «km» (kilomètres) ou «m» (miles).

Annexe 9

REPRODUCTION EN COULEUR DES SIGNAUX, SYMBOLES ET PANNEAUX DONT IL EST QUESTION DANS LES ANNEXES 1 À 7



C, 2

C, 14

D, 7

Bibliographie

[1] BAILHACHE, P., *Essai de logique déontique*, Vrin, 1991.

[2] CARNAP, R., *Meaning and Necessity*, The University of Chicago Press, 1956.

[3] CHELLAS, B., *Modal Logic : an Introduction*, Cambridge University Press, 1980.

[4] CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956.

[5] CHURCH, A., "Propositions and Sentences", *The Problem of Universals* (ed. by I. Bochenski), University of Notre Dame Press, 1956, pp. 3-11. Reprinted in *Readings in the Philosophy of Language* (ed. by J. F. Rosenberg and C. Travis), Prentice-Hall, 1971, pp. 276-282.

[6] FØLLESDAL, D. and HILPINEN, R., "Deontic Logic : An Introduction", *Deontic Logic : Introductory and Systematic Readings* (ed. by R. Hilpinen), D. Reidel Publishing Company, 1981, pp. 1-35.

[7] FREGE, G., "Der Gedanke. Eine Logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1 (1918), pp. 58-77.

[8] FREGE, G., "Die Verneinung. Eine Logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 1 (1918), pp. 143-157.

[9] FREGE, G., "Logische Untersuchungen. Dritter Teil : Gedankengefüge", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, vol. 3 (1923), pp. 36-51.

[10] FREGE, G., "Recherches logiques", *Écrits logiques et philosophiques*, Seuil, 1971, pp. 170-234. Trad. par C. Imbert.

[11] HINTIKKA, J., "Some Main Problems of Deontic Logic", *Deontic Logic : Introductory and Systematic Readings* (ed. by R. Hilpinen), D. Reidel Publishing Company, 1981, pp. 59-104.

[12] HINTIKKA, J., *La philosophie des mathématiques chez Kant*, Presses Universitaires de France, 1996. Trad. par C. Hoogaert.

[13] HUGHES, G. E. and CRESSWELL, M. J., *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, 1996.

[14] KALINOWSKI, G., *La logique déductive*, Presses Universitaires de France, 1996.

[15] KANT, E., *Critique de la raison pure* , Gallimard, 1980. Trad. par A. Delamarre et F. Marty.

[16] KANT, E., *Critique de la raison pratique* , Gallimard, 1985. Trad. par L. Ferry et H. Wismann.

[17] KANT, E., *Fondements de la métaphysique des moeurs*, Librairie Générale Française, 1993. Trad. par V. Delbos.

[18] KRIPKE, S. A., "A Completeness Theorem in Modal Logic", *The Journal of Symbolic Logic* , vol. 24 (1959), pp. 1-14.

[19] KRIPKE, S. A., "Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Modal Propositional Calculi", *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* , vol. 9 (1963), pp. 67-96.

[20] SOETEMAN, A., *Logic in Law*, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[21] WITTGENSTEIN, L., *Tractatus logico-philosophicus*, Routledge and Kegan Paul, 1969. Trad. by D. F. Pears and B. F. McGuinness.

[22] WITTGENSTEIN, L., *Tractatus logico-philosophicus*, Gallimard, 1961. Trad. par P. Klossowski.

[23] VON WRIGHT, G. H., "Deontic Logic", *Mind*, vol. 60 (1951), pp. 1-15. Reprinted in *Logical Studies* (ed. by G. H. von Wright), Routledge and Kegan Paul, 1957, pp. 58-74.

[24] VON WRIGHT, G. H., *An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action* (*Acta Philosophica Fennica*, vol. 21), North-Holland Publishing Company, 1972.

[25] VON WRIGHT, G. H., "Is There a Logic of Norms ?", *Ratio Juris*, vol. 4 (1991), pp. 265-283.

RÉSUMÉ DE LA THÈSE EN FRANÇAIS

Repartant des *Logische Untersuchungen* de Frege, nous posons que la logique est l'étude des propositions, c'est-à-dire l'étude de ce qui est soit vrai soit faux. Notre étude des propositions est fondée sur une méthode. Celle-ci est formée de deux règles qui s'enchaînent :

1. Formaliser, c'est-à-dire réduire la logique à une logique formelle. En d'autres termes, il s'agit dans un cadre propositionnel fini :
   1.1. De définir un concept de *configuration* et sur ce, de *fonction de vérité* (*sur l'espace* - fini - *des configurations*).
   1.2. De relier ce second concept à celui de proposition en admettant que chaque fonction de vérité exprime une proposition.
2. Symboliser, c'est-à-dire transformer cette logique formelle en logique symbolique. En d'autres termes, il s'agit alors :
   2.1. De définir un concept de *formule*.
   2.2. De relier ce concept à celui de fonction de vérité en définissant par récurrence une *sémantique*, à savoir une fonction telle qu'à toute formule correspond une fonction de vérité.

Une logique fondée sur cette méthode comprendra donc une double représentation : la première sera formelle ; la seconde, symbolique.

Nous défendons la thèse que *la question déontique peut être résolue suivant la méthode présentée*. Notre logique aléthico-déontique est une preuve de cette thèse. Elle est divisée en deux sections : le cas d'une Autorité est d'abord exposé, puis celui d'un ensemble fini d'Autorité(s). Elle est préfigurée par notre logique aléthique, qui emprunte dans une certaine mesure au *Tractatus logico-philosophicus* de Wittgenstein.

RÉSUMÉ DE LA THÈSE EN ANGLAIS

Starting from Frege's *Logische Untersuchungen*, we lay down that logic is the study of propositions, that is the study of what is either true or false. In order to analyze propositions, we have used a method based on two successive steps :

1. To formalize, that is to reduce logic to a formal logic. In other words, the question is, within a finite propositional frame :
   1.1. To define a concept of *configuration* and, based on this, a concept of *truth-function* (*on the* - finite - *space of configurations*).
   1.2. To link the second concept to that of proposition by assuming that each truth-function expresses a proposition.
2. To symbolize, that is to transform this formal logic into symbolic logic. In other words, the question is then :
   2.1. To define a concept of *formula*.
   2.2. To link this concept to that of truth-function by defining a *semantics* by recurrence, viz. a function such that a truth-function corresponds to any formula.

A logic grounded on this method will thus comprehend a double representation : the first will be formal ; the second, symbolic.

We defend the thesis that *the deontic question can be resolved according to this method*. Our alethico-deontic logic is a proof of this thesis. It is divided into two sections : the case of an Authority is first expounded, and then that of a finite set of Authority(ies). It is prefigured by our alethic logic, that draws to a certain extent on Wittgenstein's *Tractatus logico-philosophicus*.

DISCIPLINE

Philosophie

MOTS-CLÉS

Logique déontique, logique modale ; logique mathématique, logique philosophique

U.F.R de Lettres et Sciences Humaines
Université de Nantes
Chemin de la Censive du Tertre
44 312 Nantes Cedex 3