# CORRECTION
# DE LA LOGIQUE MODALE DU PREMIER ET DU SECOND ORDRE S 5

## 1. *Définitions sémantiques.*

0. Pour formuler une théorie sémantique de la logique modale il ne suffit pas de définir, par exemple, le nécessaire comme ce qui est vrai dans tous les modèles et le possible comme ce qui est vrai dans un modèle. Ces définitions ne font qu'introduire les notions «nécessaire» et «possible» dans le métalangage. Une sémantique de la logique modale exige que l'on se donne un langage-objet contenant des symboles pour modalités et que l'on définisse dans quelles conditions on attribuera les valeurs «vrai» ou «faux» aux formules de ce langage-objet.

On peut alors très facilement définir la validité et la réalisabilité des formules de ce langage et ensuite démontrer la correction de tel ou tel système déductif, cette correction consistant dans le fait que toutes les formules dérivables dans le système considéré sont valides.

C'est une théorie de ce genre que nous nous proposons de développer dans le présent article en nous inspirant de la définition Leibnizienne du nécessaire, comme étant ce qui est vrai dans tous les mondes possibles.

Ce n'est pas, à notre sens, la tâche du logicien d'examiner la valeur de cette métaphysique Leibnizienne. Nous pouvons nous borner à constater qu'en se laissant inspirer par cette métaphysique on peut formuler pour la logique modale S 5 une théorie sémantique analogue à la théorie sémantique formulée traditionnellement pour la logique non modale.

La théorie sémantique modale amène toutefois à envisager des prédicats d d'un genre spécial. Ce sont des prédicats dont l'extension varie d'un monde à un autre et nous leur avons donné le nom de «prédicats intensionnels«.

1. Soient A et B deux ensembles non vides n'ayant pas d'éléments communs. Appelons A «l'ensemble des individus» et B «l'ensemble des mondes». Nous dirons que ces ensembles A et B constituent un univers U.

---

(1) Voir F. CRAHAY : «Sémantique et Métaphysique», Logique et Analyse No 7, novembre 1956 PP. 19-27.

(2) Sur ce sujet, WHITEHEAD a écrit qu'en philosophie : «Logical contradictions, except as temporary slips of the mind - plentiful though temporary - are the most gratuitous of errors; and usually they are trivial. Thus, after criticism, systems do not exhibit mere illogicalities. They suffer from inadequacy and incoherence «Voir Process and Reality (New York, 1929), p. 9. Noter que le mot anglais «incoherence» correspond à ce que nous avons considéré comme pouvant subir des critiques philosophiques plutôt qu'à ce que veut dire le mot français : «incohérence».

Pour tout nombre naturel n nous entendons par «prédicat intensionnel à n places» une fonction à n+1 arguments, susceptible de prendre les valeurs «vrai» ou «faux», d'avoir un monde comme premier argument et, pour $n \neq 0$, d'avoir des individus comme n derniers arguments.

Soient a et b les nombres cardinaux des ensembles A et B. Pour tout nombre naturel n il y aura un nombre c = 2 exp (b(a exp n) ) de prédicats intensionnels à n places.

2. Donnons nous un langage L., Pour le moment nous nous bornons à considérer un langage sans axiomes ni règles de déduction.

Ce langage contiendra un nombre infini dénombrable de variables pour individus et, pour tout nombre naturel n, un nombre infini dénombrable de variables pour prédicats à n places; il ne contiendra pas de constantes pour individus ou pour prédicats.

Dans l'exposé qui suivra ces différentes espèces de variables seront désignées indifféremment par des lettres minuscules qui joueront le rôle de variables syntaxiques. Certaines lettres minuscules pourront d'ailleurs désigner d'autres expressions que des variables. Nous indiquerons chaque fois dans le contexte quelle est l'espèce d'expressions désignée oar les variables syntaxiques. Ces variables syntaxiques pourront être suivies par des nombres et nous écrirons par exemple xO, x1, x2....xn.

Nous adoptons la notation polonaise. Le langage L contiendra donc les symboles N, K, A, C, et E pour la négation, la conjonction, l'alternative, l'implication et l'équivalence, les symboles P et S (au lieu des symboles pi et sigma) pour les quantificateurs universels et existentiels, et les symboles L et M pour la nécessité et la possibilité. Nous introduisons ces lettres majuscules non seulement dans le langage objet mais aussi dans le métalangage où elles se combineront avec les variables syntaxiques pour former des expressions syntaxiques complexes.

Les règles de construction sont les suivantes :

a) Une variable pour prédicats à O place est une proposition.

b) Une variable pour prédicats à n places (n = 0) suivie de n variables pour individus est une proposition.

c) Si p est une proposition Np est une proposition.

d)e)f)g) Si p et q sont des propositions Kpq, Apq, Cpq, et Epq sont des propositions.

h)i) Si p est une proposition, Pvp et Svp, où v est une variable pour individus ou pour prédicats, sont des propositions.

j)k) Si p est une proposition Lp et Mp sont des propositions.

l) Il n'y a pas d'autres propositions que celles qui résultent de l'application des règles a-k.

Nous nous sommes ainsi donné un langage pur modal du second ordre.

3. Soit un univers U composé de l'ensemble A d'individus et de l'ensemble B de mondes. Nous conviendrons que les variables pour individus du langage L pourront prendre comme valeurs les individus de l'ensemble A et que pour tout nombre naturel n les variables pour prédicats à n places pourront prendre comme valeurs les prédicats intensionnels à n places définis à partir de l'univers U. Si alors nous donnons une valeur à chacune des variables du langage L, nous nous serons donné un système de valeurs reratif à l'univers U.

Donnons nous un univers U, un monde M de cet univers et un système de valeurs S relatif à cet univers. Nous définirons comme suit les notions «vrai pour l'univers U, le monde M et le système de valeurs S» et «faux pour l'univers U, le monde M et le système de valeurs S». Soit f une proposition du langage L.

Si f est une variable p pour prédicats à O place (c.à.d. pour propositions) si P est le prédicat intensionnel à O place donné comme valeur à p, f sera vrai ou faux pour UMS d'après que P prend la valeur «vrai» ou «faux» quand il reçoit M comme argument.

Si f est de la forme bxl...xn où b est une variable pour prédicats à n places (n ≠ 0) et où xl, ..., xn, sont des variables pour individus, si B, X1, ..., Xn sont respectivement le prédicat intensionnel à n places et les individus donnés comme valeurs à b, xl, ..., xn, f sera vrai ou «faux» pour UMS d'après que B prend la valeur «vrai» ou «faux» quand il reçoit M, X1, ..., Xn comme arguments dans cet ordre.

Si f a la forme Np, où p est une proposition, f sera vrai pour UMS si p est faux pour UMS, et faux pour UMS si p est vrai pour UMS.

Si f a la forme Kpq, où p et q sont des propositions, f sera vrai pour UMS si p et q sont vrais pour UMS et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Apq, où p et q sont des propositions, f sera vrai pour UMS si p est vrai pour UMS, ou si q est vrai pour UMS, et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Cpq, où p et q sont des propositions, f sera vrai pour UMS si p est faux pour UMS, ou si q est vrai pour UMS, et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Epq, où p et q sont des propositions, f sera vrai pour UMS si p et q sont vrais pour UMS, ou si p et q sont faux pour UMS, et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Pvp où p est une proposition et où v est une variable pour individus ou pour prédicats, f sera vrai pour UMS si pour tout système S' relatif à U, qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S, p est vrai pour UMS' et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Svp où p est une proposition et où v est une variable pour individus ou pour prédicats, f sera vrai pour UMS s'il y a un système S' relatif à U qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S et tel que p est vrai pour UMS' et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Lp, où p est une proposition, f sera vrai pour UMS si pour tout monde M' de l'univers U,p est vrai pour UM'S et sinon f sera faux pour UMS.

Si f a la forme Mp où p est une proposition, f sera vrai pour UMS s'il y a un monde M' de l'univers U tel que p est vrai pour UM'S et sinon f sera faux pour UMS.

4. Choisissons un univers U et un monde M de cet univers. Nous définissons pour les propositions du langage L les notions «valide dans UM» et «réalisable dans UM». Soit f une proposition de L.

La proposition f sera valide dans UM si et uniquement si, pour tout système de valeurs S relatif à U, f est vrai pour UMS.

La proposition f sera réalisable dans UM si et uniquement s'il y a un système de valeurs S relatif à U tel que f est vrai pour UMS.

Choisissons un univers U. Nous définissons pour les propositions du langage L les notions «valide dans U» et «réalisable dans U».

La proposition f sera valide dans U si et uniquement si pour tous les mondes M de U f est valide dans UM.

La proposition f sera réalisable dans U si et uniquement s'il y a un monde M de U tel que f est réalisable dans UM.

Nous définissons pour les propositions du langage L les notions «valide» et «réalisable».

La proposition f sera valide si et uniquement si f est valide dans tous les univers.

La proposition f sera réalisable si et uniquement s'il y a un univers dans lequel f est réalisable.

Transformons le langage L en un système déductif D en nous donnant des axiomes et des règles de déduction.

D sera correct si on n'y démontre que des formules valides. D sera adéquat si on y démontre toutes les formules valides du langage L.

## II. Langage auxiliaire

5. A partir des expressions du langage L nous formons un langage auxiliaire L' en introduisant la lettre Z. Ce symbole jouera le même rôle que le symbole traditionnel lambda.

Les expressions de L' joueront un rôle syntaxique, et appartiennent donc au métalangage. Elles désigneront certaines expressions de L qui seront appelées les résultantes des expressions correspondantes de L'.

Dans l'exposé qui suit nous continuons à nous servir des lettres minuscules à titre de variables syntaxiques en les combinant avec les constantes logiques N,K,A,C,E,P,S,L,M, et avec l'opérateur Z, pour former des expressions syntaxiques complexes.

La lettre Z suivie d'un nombre fini n (n ≠ o) de variables distinctes pour individus est un abstracteur individuel à n places.

La lettre Z suivie d'une variable pour prédicats à O place (c,à.d. d'une variable pour propositions) est un abstracteur propositionnel.

La lettre Z suivie d'une variable pour prédicats à n places (n = o) est un abstracteur prédicatif.

Un abstracteur individuel à n places suivi d'une proposition est un paraprédicat à n places, (ou encore une abstraction individuelle à n places).

Un abstracteur propositionnel suivi d'une proposition est une abstraction proporsitionnelle.

Un abstracteur prédicatif suivi d'une proposition est une abstraction prédicative.

Un paraprédicat à n places suivi de n variables pour individus (non nécessairement distinctes) est une paraproposition primaire simple.

L'expression que l'on obtient en substituant d'une manière quelconque dans une proposition des paraprédicats à nO, n1, n2... places à des variables pour prédicats à nO, n1, n2... places respectivement est une paraproposition primaire complexe.

L'on voit que dans une paraproposition primaire complexe les paraprédicats à nO, n1, n2... places seront suivis respectivement par les nO, n1, n2... variables pour individus qui suivaient les variables pour prédicats à nO, n1, n2... places dans la proposition originaire. Ces paraprédicats formeront ainsi avec des variables pour individus des parapropositions primaires simples.

Une abstraction propositionnelle suivie d'une proposition est une paraproposition secondaire propositionnelle.

Une abstraction prédicative, où la variable de l'abstracteur est une variable pour prédicats à n places (n = o), suivie d'un paraprédicat à n places est une paraproposition secondaire prédicative.

(Note : Dans l'exposé qui suit nous introduisons des parenthèses dans les expressions du langage auxiliaire pour en faciliter la lecture.)

6. Dans une abstraction les variables libres sont les variables qui se rencontrent à l'état libre dans la proposition qui suit l'abstracteur, à l'exclusion des variables qui figurent également dans l'abstracteur.

Dans une abstraction les variables liées sont les variables de l'abstracteur, les variables liées dans la proposition qui suit l'abstracteur et les variables libres dans cette proposition et qui figurent également dans l'abstracteur. On dit de ces dernières variables qu'elles sont liées par l'abstracteur. En particulier dans un paraprédicat Zxl...xn(p) où p est une proposition si la variable xi(i = 1, 2... n) apparaît à l'état libre dans p, on dit qu'elle est liée par la i-ème variable de l'abstracteur.

La résultante d'une paraproposition primaire simple Zxl...xn(p)al...an est la proposition p' que l'on obtient en substituant simultanément dans la proposition p les variables pour individus al...an aux variables pour individus xl...xn respectivement, là où celles-ci se rencontrent à l'état libre dans p.

La substitution est simultanée si à chaque endroit dans p où se rencontre une variable liée par l'abstracteur on effectue une et une seule substitution.

La résultante d'une paraproposition primaire complexe p est la proposition p' que l'on obtient en remplaçant dans p chaque paraproposition primaire simple par sa résultante.

La résultante d'une paraproposition propositionnelle Zq(p)j est la proposition pj que l'on obtient en substituant dans la proposition p la proposition j à la variable pour propositions q là où celle-ci se rencontre à l'état libre dans p.

La résultante intermédiaire d'une paraproposition prédicative Zb(p)k, où k est un paraprédicat du même nombre de places que la variable b, est la paraproposition primaire complexe ou simple p' que l'on obtient en substituant dans la proposition p le paraprédicat k à la variable b là où celle-ci se rencontre à l'état libre dans p.

La résultante finale ou plus brièvement la résultante d'une paraproposition prédicative est la résultante de sa résultante intermédiaire.

7. Une paraproposition primaire simple Zxl...xn(p)al...an est bien formée si pour tout i(i = 1,2...n) la variable xi ne se rencontre pas à l'état libre dans p dans le champ d'application d'un quantificateur Pai ou Sai.

Une paraproposition primaire complexe est bien formée si toutes les parapropositions primaires simples qu'elle contient sont bien formées.

Une paraproposition propositionnelle Zq(p)j est bien formée si la variable q ne se rencontre pas à l'état libre dans p dans le champ d'application d'un quantificateur Pv ou Sv où v est une variable quelconque qui se rencontre à l'état libre dans j.

Une paraproposition prédicative Zb(p)k est bien formée si
1° la variable b ne se rencontre pas à l'état libre dans p dans le champ d'application d'un quantificateur Pv ou Sv où v est une variable quelconque qui se rencontre à l'état libre dans le paraprédicat k, et si de plus
2° la résultante intermédiaire de Zb(p)k est bien formée.

## *III.- Propriétés sémantiques des propositions et des parapropositions.*

8. Définition. Nous donnons la définition récursive suivante de la notion «proposition couverte».

1° Les propositions de la forme Lp et Mp sont couvertes.

2° Si p est une proposition couverte, Np est une proposition couverte.

3° Si p et q sont des propositions couvertes, Kpq, Apq, Opq et Epq sont des propositions couvertes.

4° Si p est une proposition couverte et si v est une variable quelconque Pvp et Svp sont des propositions couvertes.

5° Il n'y a pas d'autres propositions couvertes que celles définies par les règles 1-4.

9. Définition. La valeur d'un paraprédicat à n places Zxl...xn(p) pour un univers U et un système de valeurs S relatif à U est le prédicat intensionnel à n places qui pour tout monde M et pour toute série d'individus Al... An prend la valeur «vrai» ou «faux» d'après que la proposition p prend la valeur «vrai» ou «faux» pour UMS', où S' est un système de valeurs qui attribue les individus Al,...,An comme valeurs aux variables pour individus xl,...,xn, respectivement et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

10. *Théorème I.-* Soit un univers quelconque U, deux mondes quelconquesM et M' de U et un système quelconque de valeurs relatif à U. Si p est une proposition couverte p a la même valeur pour UMS et pour UM'S.

Preuve par induction sur la définition de formule couverte.

11. *Théorème II.* Soit p une proposition qui ne contient que les variables v1... vn à l'état libre. Soit un univers quelconque U, un monde quelconque M de U et deux systèmes de valeurs S et S' relatifs à U qui ne diffèrent pas entre eux en ce qui concerne les valeurs données aux variables v1...vn. Alors p prend la même valeur pour UMS et pour UMS'. En particulier, si p est une proposition fermée (c.à.d. ne contenant pas de variables à l'état libre),

alors, pour deux systèmes de valeurs quelconques S et S' relatifs à U, p prend la même valeur pour UMS et pour UMS'.

Preuve par induction sur la construction de p.

12. *Théorème III.* Soit k le paraprédicat Zxl...xr(p) qui ne contient que les variables vl...vn à l'état libre. Soit un univers quelconque U, un monde quelconque M de U et deux systèmes de valeurs S et S' relatifs à U qui ne diffèrent pas entre eux en ce qui concerne les valeurs données aux variables vl,...,vn Alors k prend la même valeur pour US et pour US'. En particulier si k est un paraprédicat fermé (c.à.d. ne contenant pas de variables à l'état libre), alors pour un univers U et pour deux systèmes de valeurs quelconques S et S' relatifs à U, k prend la même valeur pour US et US'.

Dans la preuve on se fonde sur la définition de la valeur d'un paraprédicat et sur le résultat du Théorème II.

13. *Théorème IV.* Pour un univers quelconque U, un monde quelconque M de U et un système quelconque de valeurs S relatif à U, si Zxl...xn(p)al... an est une paraproposition primaire simple bien formée, la valeur pour UMS de la résultante p' de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour UMS' où S' est un système de valeurs qui attribue les individus Al,...,An comme valeurs aux variables pour individus xl,... xn, respectivement, Al...An étant dans cet ordre les individus attribués par S comme valeurs aux variables al... an respectivement, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs qze S.

Preuve par induction sur la construction de p.

14. *Théorème V.* Pour un univers quelconque U, un monde quelconque M de U, et un système quelconque de valeurs S relatif à U, si Zxl...xn(p)al...an est une paraproposition primaire simple bien formée, et si P est le prédicat intensionnel à n places qui est la valeur pour US du paraprédicat Zxl ...xn(p) la valeur pour UMS de la résultante p' de la dite paraproposition est celle que prend le prédicat P quand on lui donne comme arguments le monde M et les individus Al...An, ces derniers étant dans cet ordre les valeurs données par S aux variables al...an.

Dans la preuve on se fonde sur la définition de la valeur d'un paraprédicat et sur le résultat du théorème IV.

15. *Théorème VI.* Pour un univers quelconque U, un monde quelconque M de U et un système quelconque de valeurs S relatif à U, si Zy(p)q est une paraproposition propositionnelle bien formée, la valeur pour UMS de la résultante p' de cette paraproposition est la même que la proposition p pour UMS' où S' est un système de valeurs qui attribue à la variable pour propositions y la valeur « vrai » ou « faux » d'après que la proposition q prend la valeur « vrai » ou « faux » pour UMS, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

Preuve par induction sur la construction de p.

16. *Théorème VII.* Pour un univers quelconque U, un monde quelconque M de U, et un système quelconque de valeurs S, relatif à U, si Zb(p)k est une paraproposition prédicative bien formée où b est une variable pour prédicats à n places et k un paraprédicat à n places, la valeur pour UMS de la résultante finale p'' de cette paraproposition est la même que la valeur de la proposition p pour UMS', où S' est un système de valeurs qui attribue à la variable b la valeur que le paraprédicat k prend pour US, et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S.

Preuve par induction sur la construction de p.

## IV.- Correction du système déductif S5 du second ordre.

17. Nous formulons le système S5 au moyen des séquences de Gentzen. Une séquence comporte 1° une série finie, éventuellement vide, de propositions du langage L; cette série est appelée «l'antécédent»; 2° le symbole «I»; 3° une série finie, éventuellement vide, de propositions du langage L; cette série est appelée «le conséquent».

Le système S5 comporte un schéma axiomatique et vingt-cinq règles de déduction partagées en quatre groupes : les règles de structure, les règles propositionnelles, les règles de quantification et les règles modales. Ces règles permettent de passer d'une ou de deux séquences, appelées «prémisses» à une autre séquence, appelée «conclusion».

Pour formuler le schéma axiomatique et les règles de déduction nous nous servons d'un métalangage comportant entre autres les expressions dont nous nous sommes servi pour formuler la théorie des parapropositions. Nous introduisons yégalement le symbole «I» dans le métalangage.

En particulier, dans la présente section IV, les lettres p et q désigneront des propositions, et les lettres ä, ä', ë et ë' désigneront des séries de proportions. Dans une expression de la forme Pvp ou Svp, la lettre v désignera une variable pour individus, une variable pour propositions ou une variable pour prédicats à n places (n = o). Dans une expression de la forme Zv(p)a, la lettre a désignera une variable pour individus, une proposition ou un paraprédicat à n places d'après que v désigne une variable pour individus, une variable pour propositions ou une variable pour prédicats à n places. Une expression de la forme Zv(p)a désigne une paraproposition, mais il est entendu que ce ne sont pas des parapropositions mais les résultantes des parapropositions qui figurent dans les déductions.

Dans l'antécédent nous faisons suivre de virgules les expressions désignant des propositions ou des séries de propositions et dans le conséquent ces expressions sont précédées de virgules.

18. Nous définissons les notions «vrai» et «faux» pour les séquences de Gentzen relativement à un univers U, un monde M et un système de valeurs S.

Une séquence ä, I, ë est vraie pour UMS si ä contient une proposition fausse pour UMS ou si ë contient une proposition vraie pour UMS. Sinon la séquence ä, I, ë, est fausse pour UMS.

A partir de cette définition on peut, comme nous l'avons fait au paragraphe 4 pour les propositions, définir pour les séquences les notions de «valide pour UM», «valide pour U», «valide», «réalisable pour UM», «Réalisable pour U» et «réalisable».

Nous démontrons que le système S5 est correct en ce sens qu'on n'y déduit que des séquences valides. Nous démontrerons en particulier que les axiomes sont valides et que les règles de déduction sont telles que, si les prémisses sont valides, la conclusion est valide. Il convient ici de se rappeler que «valide» est synonyme de «vrai pour tout univers U, tout monde M de cet univers et tout système de valeurs S relatif à cet univers».

Nous démontrons la correction ainsi comprise des axiomes (ou, ce qui revient au même, du schéma axiomatique) et des règles de déduction au fur et à mesure que nous les formulons.

*19.* Le schéma axiomatique (que nous désignons par «Ax») est le suivant :

$$p, I, p.$$

Les axiomes construits d'après ce schéma sont évidemment valides. Si p désigne une proposition vraie, e contient une proposition vraie, et si p désigne une proposition fausse, e contient une proposition fausse.

Il y a sept règles de structure, à savoir l'addition, la permutation et la contraction dans l'antécédant (désignées respectivement par «ADI» «PEI» et «COI») l'addition, la permutation et la contraction dans le conséquent (désignées respectivement par «IAD», «IPE» et «ICO» et la césure (désignée par «Cés»).

Ces règles sont les suivantes :

$$\text{ADI}\ \frac{\ddot{a},I,\ddot{e}}{p,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e}}{\ddot{a},I,\ddot{e},p}\ \text{IAD}$$

$$\text{PEI}\ \frac{\ddot{a},p,q,\ddot{a}',I,\ddot{e}}{a,q,p,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p,q,\ddot{e}'}{\ddot{a},I,\ddot{e},q,p,\ddot{e}'}\ \text{IPE}$$

$$\text{COI}\ \frac{p,p,\ddot{a},I,\ddot{e}}{p,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p,p,}{\ddot{a},I,\ddot{e},p}\ \text{ICO}$$

$$\frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p \qquad p,\ddot{a},I,\ddot{e}}{\ddot{a},I,\ddot{e}}\ \text{Cés}$$

La correction des règles à une prémisse est évidente. La preuve de la correction de la césure est la suivante. Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M, et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Par hypothèse les deux prémisses sont vraies pour UMS. Alors a doit contenir une proposition fausse pour UMS ou e doit contenir une proposition vraie pour UMS, car sinon p devrait être vrai pour que la première prémisse soit vraie, et p devrait être faux pour que la seconde prémisse soit vraie. Il s'ensuit que la conclusion est vraie pour UMS.

20. Il y a dix règles propositionnelles, à savoir l'introduction de N,K,A,C et E dans l'antécédent (désignées respectivement par «NI», «KI», «AI», «CI» et «EI» et l'introduction de N, K,A,C, et E dans le conséquent (désignées respectivement par «IN», «IK», «IA», «IC» et «IE»).

Ces règles sont les suivantes :

$$\text{NI}\ \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p}{Np,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad\qquad \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e}}{\ddot{a},I,\ddot{e},Np}\ \text{IN}$$

$$\text{KI}\ \frac{p,q,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Kpq,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad\qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p \qquad \ddot{a},I,\ddot{e},q}{\ddot{a},I,\ddot{e},Kpq}\ \text{IK}$$

$$\text{AI}\ \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e} \qquad q,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Apq,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad\qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p,q}{\ddot{a},I,\ddot{e},Apq}\ \text{IA}$$

$$\text{CI}\ \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p \qquad q,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Cpq,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad\qquad \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e},q}{\ddot{a},I,\ddot{e},Cpq}\ \text{IC}$$

$$\text{EI}\ \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p,q, \qquad p,q,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Epq,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad\qquad \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e},q \qquad q,\ddot{a},I,\ddot{e},p}{\ddot{a},I,\ddot{e},Epq}\ \text{IE}$$

Nous donnons la preuve de la correction de EI et de IE.

Pour EI : .Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers, Si M contient une proposition fausse pour UMS, ou si ë contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS, alors, comme par hypothèse la première est vraie pour UMS, il faudra qu'une des propositions p et q soit vraie pour UMS, et comme par hypothèse la seconde prémisse est vraie pour U.M.S, il faudra qu'une des propositions p et q soit fausse pour UMS. Si des deux propositions p et q l'une est vraie et l'autre est fausse pour UMS, Epq sera faux pour UMS et donc la conclusion sera vraie pour UMS.

Pour IE : Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M, et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Si ä contient une proposition pour UMS ou si ë contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS deux cas sont possibles : si p est vrai pour UMS, comme par hypothèse la première est vraie pour UMS, il faudra que q soit vrai pour UMS; si p est faux pour UMS, comme par hypothèse la seconde prémisse est vraie pour UMS, il faudra que q soit faux pour UMS; si p et q sont vrais pour UMS ou si p et q sont faux pour UMS. Epq est vrai pour UMS et donc la conclusion sera vraie pour UMS.

21. Il y a quatre règles de quantification, à savoir l'introduction de P et S dans l'antécédant (désignées respectivement par «PI» et «SI») et l'introduction de P et S dans le conséquent (désignées respectivement par «IP» et «IS»).

Ces règles sont les suivantes :

$$\mathrm{PI}\ \frac{Zv(p)a, \ddot{a}, I, \ddot{e}}{Pvp, \ddot{a}, I, \ddot{e}}\ (1) \qquad (2)\ \frac{\ddot{a}, I, \ddot{e}, p}{\ddot{a}, I, \ddot{e}, Pvp}\ \mathrm{IP}$$

$$\mathrm{SI}\ \frac{p, \ddot{a}, I, \ddot{e}}{Svp, \ddot{a}, I, \ddot{e}}\ (2) \qquad (1)\ \frac{\ddot{a}, I, \ddot{e}, Zv(p)a}{\ddot{a}, I, \ddot{e}, Svp}\ \mathrm{IS}$$

Restriction (1) : dans les règles PI et IS, Zv(p)a doit être une paraproposition bien formée.

Restriction (2) : dans les règles IP et SI, la variable v ne peut pas se rencontrer à l'état libre dans les propositions de a et de e.

Nous donnons la preuve de la correction de PI et de IP.

Pour PI : Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Si ä contient une proposition fausse pour UMS, ou si ë contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS, comme par hypothèse la prémisse est vraie pour UMS, Zv(p)a devra être faux pour UMS. Il s'ensuit en vertu d'un des théorèmes IV, VI ou VII qu'il y a un système de valeurs S' qui donne comme valeur à v la valeur que a prend pour S et qui donne à toutes les autres variables les mêmes valeurs que S et tel que p est faux pour UMS'. Il y a donc un système de valeurs S' qui ne diffère de S que par la valeur donnée à v et tel que p est faux pour UMS'. Donc Pvp est faux pour UMS et dès lors la conclusion est vraie pour UMS.

Pour IP : Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M, et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Si a contient une proposition fausse pour UMS ou si e contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS, comme les propositions de ä et de e ne contiennent pas v à l'état libre, il s'ensuivra en vertu du théorème II que, pour tout système S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S, ä ne contiendra pas de propositions fausses pour UMS' et ë ne contiendra pas de propositions vraies pour UMS'. Or par hypothèse pour tous ces systèmes S' la prémisse est vraie pour UMS'. Donc , pour tous ces systèmes S', p devra être vrai pour UMS'. Donc Pvp est vrai pour UMS et dès lors la conclusion est vraie pour UMS.

22. Il y a quatre règles modales, à savoir l'introduction de L et M dans l'antécédent (désignées respectivement par «LI» et «MI») et l'introduction de L et M dans le conséquent (désignées respectivement par «IL» et «IM»).

Ces règles sont les suivantes :

$$\text{LI}\ \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Lp,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad (3)\ \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p}{\ddot{a},I,\ddot{e},Lp}\ \text{IL}$$

$$\text{MI}\ \frac{p,\ddot{a},I,\ddot{e}}{Mp,\ddot{a},I,\ddot{e}} \qquad \frac{\ddot{a},I,\ddot{e},p}{\ddot{a},I,\ddot{e},Mp}\ \text{IM}$$

Restriction (3) : dans les règles IL et MI les propositions de a et de e doivent être couvertes.

Nous donnons la preuve de la correction de LI et de IL.

Pour LI : Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M, et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Si ä contient une proposition fausse pour UMS, ou si ë contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS, et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS, alors, comme par hypothèse la prémisse est vraie pour UMS, il faudra que p soit faux pour UMS. Donc Lp est faux pour UMS et dès lors la conclusion est vraie pour UMS.

Pour IL : Soit un univers quelconque U, un monde quelconque de cet univers M, et un système quelconque de valeurs S relatif à cet univers. Si ä contient une proposition fausse pour UMS, ou si ë contient une proposition vraie pour UMS, la conclusion sera vraie pour UMS. Si ä ne contient aucune proposition fausse pour UMS et si ë ne contient aucune proposition vraie pour UMS, comme les propositions de ä et de ë sont couvertes, il s'ensuivra en vertu du théorème I que, pour tout monde M', ä ne contiendra pas de propositions fausses pour UM'S et ë ne contiendra pas de propositions vraies pour UM'S. Or par hypothèse pour tous ces mondes M' la prémisse est vraie pour UM'S. Donc, pour tous ces mondes M', p devra être vrai pour UM'S. Donc Lp est vrai pour UMS et dès lors la conclusion est vraie pour UMS.

## V. *Logique du premier ordre.*

23. De ce qui précède on tire facilement une théorie pour la logique modale du premier ordre.

La logique modale du premier ordre contiendra un nombre infini dénombrable de variables pour individus et, pour chaque nombre naturel n, un nombre infini dénombrable de variables pour prédicats à n places.

Les règles de construction sont les mêmes que celles de la logique modale du second ordre, sauf que, dans les expressions de la forme Pvp et Svp, v doit être une variable pour individus.

24. Les définitions sémantiques sont les mêmes que pour la logique modale du second ordre.

25. Dans la logique modale du premier ordre on se bornera à considérer des abstracteurs contenant une seule variable pour individus et donc des parapropositions primaires simples de la forme Zx(p)a où x est une variable pour individus.

26. On se bornera à démontrer les théorèmes I, II et IV. Dans ce dernier théorème on se bornera à considérer des parapropositions formées à partir d'abstracteurs contenant une seule variable pour individus.

27. Les règles de déduction sont les mêmes que celles de la logique du second ordre mais la portée des règles de quantification se trouve automatiquement réduite du fait qu'il est entendu que, dans les expressions de la forme Pvp, Svp et Zv(p)a, v désigne une variable pour individus à l'exclusion des variables pour prédicats.

La correction de la logique modale du premier ordre se prouve alors de la même manière que celle de la logique modale du second ordre.

## *VI.- Nécessité et validité.*

28. On peut être tenté de confondre les notions de nécessité et de validité. On serait alors amené à formuler la théorie sémantique suivante :

Au lieu de se donner un univers composé d'un ensemble d'individus et d'un ensemble de mondes, on se bornerait à se donner un domaine D, c.à.d. un ensemble d'individus. On se donne alors par le fait même un ensemble de prédicats extensionnels. Pour tout nombre naturel n un prédicat extensionnel est une fonction à n arguments, ces arguments étant des individus, et susceptible de prendre les veleurs «vrai» et «faux».

Les variables pour individus peuvent alors prendre des individus comme valeurs, et les variables pour prédicats à n places peuvent prendre des prédicats extensionnels à n places pour valeurs. Les variables pour propositions peuvent prendre la valeur «vrai» ou la valeur «faux».

29. Donnons nous un domaine D et un système de valeurs S.

Une variable pour propositions est vraie ou fausse pour Ds d'après que S lui donne la valeur «vrai» ou «faux».

Une proposition de la forme bxl...xn, où b est une variable pour prédicats à n places, et où xl....,xn sont des variables pour individus, sera vraie pour DS si le prédicat extensionnel B, donné comme valeur par S à b, prend la valeur « vrai » quand on lui donne les individus X1,...Xn comme arguments, ceux-ci étant dans cet ordre les valeurs données par S à xl, ...,xn, respectivement; et bxl,...xn sera faux pour DS si B prend la valeur « faux » quand on lui donne X1,...,Xn comme arguments.

Une proposition de la forme Np est vraie pour DS si p est faux pour DS, et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Kpq est vraie pour DS si p est q sont vrais pour DS et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Apq est vraie pour DS si p est vrai pour DS ou si q est vrai pour DS et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Cpq est vraie pour DS si p est faux pour DS ou si q est vrai pour DS et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Epq est vraie pour DS si p et q sont vrais pour DS ou si p et q sont faux pour DS et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Pvp est vraie pour DS si pour tout système S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S, p est vrai pour DS', et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Svp est vraie pour DS s'il y a un système S' qui donne à toutes les variables autres que v les mêmes valeurs que S et tel que p est vrai pour DS', et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Lp est vraie pour DS si pour tout système de valeurs S', p est vrai pour DS', et sinon elle est fausse pour DS.

Une proposition de la forme Mp est vraie pour DS s'il y a un système de valeurs S' tel que p est vrai pour DS', et sinon elle est fausse pour DS.

30. Une proposition est valide pour D si pour tout système de valeurs S elle est vraie pour DS.

Une proposition est réalisable pour D s'il y a un système de valeurs S tel qu'elle est vraie pour DS.

Une proposition est valide si pour tout domaine D elle est valide pour D.

Une proposition est réalisable s'il y a un domaine D tel qu'elle est réalisable pour D.

Transformons notre langage L en un système déductif en nous donnant des axiomes et des règles de déduction.

Le système déductif sera correct si on n'y démontre que des formules valides.

Ce système déductif sera adéquat si on y démontre toutes les formules valides du langage L.

31. Les règles sémantiques que nous venons de formuler rendent incorrecte la logique modale S5 tant du premier que du second ordre.

Dans la logique modale S5 du premier ordre et à fortiori dans la logique modale S5 du second ordre on peut former la déduction suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{bx,I,bx} & \\ \hline \text{I,bx,Nbx} & \text{IN} \\ \hline \text{I,AbxNbx} & \text{IA} \\ \hline \text{I,LAbxNbx} & \text{IA} \\ \hline \text{I,SyLAbxNby} & \text{IS} \end{array}$$

La conclusion de cette déduction n'est pas valide dans le système de sémantique proposé dans la présente section VII.

En effet donnons nous un domaine D composé de deux individus 0 et 1. Soit B un prédicat à une place tel que BO est vrai et que B1 est faux. Soit S un système de valeurs qui donne B comme valeur à b, 1 comme valeur à x, et n'importe quelle valeur aux autres variables du langage L. La proposition SyLAbxNby sera fausse pour DS.

En effet soit S'' un système de valeurs qui donne B comme valeur à b, 1 comme valeur à x, 0 comme valeur à y, et n'importe quelle autre valeur aux autres variables du langage L. Nous avons successivement :

bx est faux pour DS'';
by est vrai pour DS'';
Nby est faux pour DS'';
AbxNby est faux pour DS'';
Pour tout système S''', LabxNby est faux pour DS''';

En particulier, pour tout système S' qui donne à toutes les variables autres que y les mêmes valeurs que S, LabxNby est faux pour DS';
Donc SyLAbxNby est faux pour DS.

32. Dans la logique modale du second ordre on peut former la déduction suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{bx,I,bx} & \\ \hline \text{I,bx,Nbx} & \text{IN} \\ \hline \text{I,AbxNbx} & \text{IA} \\ \hline \text{I,LabxNbx} & \text{IL} \\ \hline \text{I,ShLAbxNhx} & \text{IS} \end{array}$$

La conclusion de cette déduction n'est pas réalisable dans le système de sémantique proposé dans la présente section VII.

En effet donnons nous un domaine quelconque D et un système quelconque de valeurs S.

Soit X un individu du domaine D. Soit B un prédicat à une place tel que Bx soit faux. Soit H un prédicat à une place tel que HX soit vrai.

Considérons le système de valeurs S'' qui donne X comme valeur à x, B comme valeur à b et H comme valeur à h.

Nous avons successivement :

bx est faux pour DS'';
hx est vrai pour DS'';
Nhx est faux pour DS'';
AbxNhx est faux pour DS'';
Pour tout système S''', LAbxMhx est faux pour DS''';

En particulier pour tout système S' qui donne à toutes les variables autres que h les mêmes valeurs que S. LAbxNhx est faux pour DS';
Donc ShLAbxNhx est faux pour DS.

La preuve a été faite pour un domaine quelconque D et pour un système de valeurs quelconque S.

33. Le vice de la théorie sémantique de la présente section VI consiste dans le fait qu'elle assimile les symboles L et M à des abréviations pour la fermeture universelle ou existentielle. Dès lors dams les expressions de la forme SyLAbxNby ou ShLAbxNhy les variables y et h devraient être considérées comme liées par le symbole « L » et non par les quantifications « Sy » ou « Sh », comme on le fait en logique modale. La logique modale ne traite donc pas les symboles « L » et « M » comme des abréviations pour la fermeture universelle ou existentielle. En d'autres termes la logique modale n'identifie pas les notions de nécessité et de validité.

# BIBLIOGRAPHIE

1. A. Church, Introduction to Mathematical Logic, Vol. I, Princeton, 1956.

2. G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schlieszen, Mathematische Zeitschrift Bd 39 (1934).

3. O. Ketonen, Untersuchungen zum Prädikatenkalkül, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A,I, Mathematica-physica 23, Helsinki, 1944.

4. C.I. Lewis and C.H. Langford, Symbolic logic, New York and London, 1932.

5. R. Barcan, A functional calculus of first order based on strict implication, Journal of symbolic logic, XI (1946).

Z. R. Barcan, The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication (ibid).

7: R. Barcan, The identity of individuals in a strict functional calculus of second order, Journal of symbolic logic, XI (1947).

8. R. Carnap. Modality and Quantification, Journal of symbolic logic, XI, (1946).

9. R. Carnap, Meaning and necessity, Cambridge (Mass) 1947.

10. R. Feys, Les systèmes formalisés des modalité aristotéliciennes, Revue philosophique de Louvain, 48 (1950).

11. J.G. Kemeny, A new approach to semantics, Journal of symbolic logic, XXI (1956).

A. BAYART. *(Bruxelles)*.