Cahiers du Centre de logique
Volume 9

Limites d'espaces métriques et ultraproduits

par

P. Wantiez
Université de Mons–Hainaut

1. Introduction

Dans un groupe de type fini Γ, tout élément s'écrit comme un mot en les générateurs et leurs inverses. On dit que Γ est à croissance polynomiale s'il existe un polynôme $p(x)$ tel que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le nombre d'éléments de Γ pouvant s'écrire comme des mots de longueur $\leqslant n$ est borné par $p(n)$.

Par exemple, tout groupe abélien de type fini est à croissance polynomiale. Wolf a démontré qu'en fait, tout groupe nilpotent de type fini est à croissance polynomiale. D'autre part, toute extension finie d'un groupe à croissance polynomiale est encore à croissance polynomiale ([3]).

M. Gromov a démontré la difficile réciproque du résultat de Wolf : tout groupe à croissance polynomiale est nilpotent-par-fini ([3]).

L'argument essentiel de la preuve de Gromov est d'associer, à tout groupe à croissance polynomiale Γ, un espace métrique Y possédant de bonnes propriétés. Pour construire cet espace, Gromov utilise une notion de limite d'espaces métriques, associée à la définition d'une "distance de Hausdorff" entre deux espaces métriques pointés propres ([3]).

Van den Dries et Wilkie ont ensuite revu la preuve de Gromov et ont montré qu'en utilisant une notion d' “ultraproduit limité” d'espaces métriques, on pouvait associer à tout groupe de type fini Γ un espace métrique Y complet, homogène et connexe. Lorsque le groupe Γ est à croissance polynomiale, ils démontrent que cet espace est de plus localement compact et de dimension finie, autrement dit qu'il possède toutes les propriétés nécessaires à la preuve de Gromov ([10]).

Une question naturelle (posée en particulier par R.G. Möller (Reykjavik) [7]) est de savoir si les deux espaces définis l'un par Gromov (grâce aux limites d'espaces métriques), l'autre par van den Dries et Wilkie (grâce aux ultraproduits), sont isométriques.

Nous allons établir une telle isométrie dans le cas un peu plus général de la construction d'un espace Y associé à une famille $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'espaces métriques pointés propres (possédant de bonnes propriétés). Nous montrerons aussi que sous des hypothèses appropriées sur les espaces E_i, cet espace Y sera complet, homogène, connexe, localement compact et de dimension finie.

2. Groupes à croissance polynomiale

Soit Γ un groupe de type fini, engendré par une partie finie X.

La fonction *longueur* sur Γ est définie par :

$$\begin{aligned} |\cdot| \;=\; & |\cdot|_X : \Gamma \to \mathbb{N} \quad \text{avec} \\ & |g| \;=\; \text{longueur d'un plus court représentant de } g \\ & \qquad\quad \text{dans l'alphabet } X \cup X^{-1}. \end{aligned}$$

Propriétés

(a) $|g| = 0 \Leftrightarrow g = e$ *(où e est l'identité de Γ),*

(b) $|g| = |g^{-1}|$,

(c) $|gh| \leqslant |g| + |h|$.

Ces propriétés de la fonction longueur permettent de définir une *métrique* sur Γ par :

$$d = d_X : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R} \qquad \text{avec } d(g,h) = |g^{-1}h|.$$

Cette métrique possède de plus la propriété d'être invariante à gauche i.e. $d(ag, ah) = d(g, h)$.

Notons par $B(n)$ la boule fermée de centre e et de rayon n dans Γ.

La fonction de *croissance* sur Γ est définie par :

$G = G_X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
avec $G(n) = \#B(n) =$ nombre d'éléments du groupe représentables comme des mots sur $X \cup X^{-1}$ de longueur $\leqslant n$.

Définitions

(a) Γ est à *croissance polynomiale* s'il existe $d \in \mathbb{N}$, $c > 0$ tels que $G(n) \leqslant c.n^d$ pour $n \geqslant 1$.
La borne inférieure de tels d est appelée le *degré de croissance* de Γ.

(b) Γ est à *croissance exponentielle* s'il existe $c > 1$ tel que $G(n) \geqslant c^n$ pour $n \geqslant 0$. □

Remarquons que, si X et X' sont deux ensembles générateurs pour Γ, alors les métriques d_X et $d_{X'}$ associées respectivement à X et X' sont équivalentes. Cela implique que la croissance d'un groupe est indépendante de l'ensemble générateur choisi (et, dans le cas polynomial, le degré de croissance est aussi indépendant de l'ensemble générateur choisi).

Exemples

(a) $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ est un groupe à croissance polynomiale de degré n ($n \geqslant 1$).

(b) Tout groupe abélien de type fini Γ est à croissance polynomiale de degré r, où r est le rang de Γ (i.e. $\Gamma \cong \mathbb{Z}^r \times C$, où C est un produit fini de groupes cycliques finis).

(c) Tout groupe nilpotent de type fini est à croissance polynomiale ([12]).

(d) Toute extension d'un groupe à croissance polynomiale par un groupe fini est encore à croissance polynomiale ([10], remarque I.6.(iii)). En particulier, tout groupe qui est une extension d'un groupe nilpotent par un groupe fini (un tel groupe est appelé nilpotent-par-fini) est à croissance polynomiale.

(e) Tout groupe résoluble est soit à croissance polynomiale soit à croissance exponentielle ([6], [12]) ; il en est de même pour les groupes linéaires ([9]).

(f) Tout groupe libre est à croissance exponentielle.

(g) Il existe des groupes qui ne sont ni à croissance polynomiale, ni à croissance exponentielle ([2]). □

M. Gromov a démontré la difficile réciproque du théorème de Wolf (voir exemple (c)) :

Théorème 1 ([3])

Tout groupe à croissance polynomiale est nilpotent-par-fini.

Un des éléments fondamentaux de la preuve de Gromov est d'associer à tout groupe à croissance polynomiale Γ un espace métrique Y possédant les propriétés suivantes :

(a) Y est homogène (i.e. étant donnés deux points quelconques de Y, il existe une isométrie de Y qui applique un point sur l'autre),

(b) Y est connexe et localement connexe,

(c) Y est complet,

(d) Y est localement compact,

(e) Y est de dimension finie.

Cet espace métrique Y est construit à partir des espaces métriques $(\Gamma, d/n_i)_{i\geqslant 1}$, où d est la métrique définie sur Γ et (n_i) est une suite de naturels tendant vers l'infini et possédant une propriété de régularité ([3]).

Cette construction peut être faite selon l'une des deux méthodes suivantes :

▶ ***Méthode de Gromov*** ([3])
On peut définir une notion de "distance de Hausdorff" entre deux espaces métriques pointés propres (i.e. où toute boule fermée de rayon fini est compacte), ce qui permet d'introduire la notion de limite d'espaces métriques. Des critères de convergence permettent alors de prouver que, si la suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ possède une propriété de régularité, alors la suite $\{(\Gamma, d/n_i)\}_{i\geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente dont la limite est un espace métrique Y possédant les propriétés (a) $\to$ (e).

▶ ***Méthode de van den Dries et Wilkie*** ([10])
On peut définir une notion d' "ultraproduit limité" des espaces métriques $(\Gamma, d/n_i)_{i\geqslant 1}$. L'avantage de cette méthode est que l'on peut associer un espace métrique Y à tout groupe de type fini Γ : si (n_i) est une suite de naturels tendant vers l'infini, alors l' "ultraproduit limité" des $(\Gamma, d/n_i)$ est un espace métrique possédant les propriétés (a) $\to$ (c).

Si, de plus, Γ est à croissance polynomiale, et si la suite $(n_i)_{i\geqslant 1}$ possède une propriété de régularité, alors l' "ultraproduit limité" des $(\Gamma, d/n_i)$ possède les propriétés (d) et (e).

Exemples. Dans les exemples suivants, l'espace métrique associé au groupe à croissance polynomiale considéré est obtenu en construisant l' "ultraproduit limité" des $(\Gamma, d/n_i)$.

(a) L'espace métrique associé à $\mathbb{Z}^n$ est isométrique à $\mathbb{R}^n$ muni de la distance $d((r_i),(s_i)) = \sum_i |r_i - s_i|$. Ce résultat s'étend aux groupes abéliens de type fini.

(b) L'espace métrique associé à un groupe nilpotent de type fini Γ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (où n est la somme des rangs des quotients de la série centrale descendante de Γ ; le rang d'un groupe abélien de type fini A étant l'entier naturel n tel que $A \cong \mathbb{Z}^n \times C$, où C est un produit fini de groupes cycliques finis) muni de la métrique $d((r_i),(s_i)) = \sum_i |r_i - s_i|$ ([8]). □

Une question naturelle est de savoir si les deux espaces construits l'un par la méthode de Gromov, l'autre par la méthode de van den Dries et Wilkie, sont isométriques.

La réponse est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2. *Soit Γ un groupe de type fini à croissance polynomiale, et soit d la métrique définie sur Γ. Soit $(n_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de naturels tendant vers l'infini, et notons $\Gamma_i = (\Gamma, d/n_i)$, pour $i \geqslant 1$.*

Alors, on peut choisir convenablement la suite (n_i) de telle façon que la suite $\{\Gamma_i\}_{i\geqslant 1}$ contienne une sous-suite convergente $\{\Gamma_{i_k}\}_{k\geqslant 1}$ (selon la notion de convergence définie par Gromov) dont la limite est isométrique à l' "ultraproduit limité" des Γ_{i_k}, $k \geqslant 1$.

Pour prouver ce théorème, nous allons d'abord rappeler les notions d' "ultraproduits limités" et de limites d'espaces métriques que nous utiliserons.

Remarquons que la définition de la distance de Hausdorff entre deux espaces métriques pointés propres que nous utiliserons ici n'est pas tout à fait celle introduite par Gromov ([3]) mais la version adaptée donnée par Tits ([9]).

3. Ultraproduits d'espaces métriques

Soit $\{(E_i, d_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques et choisissons un point de référence e_i dans chacun des E_i. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$. On note par $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ l'ultraproduit des E_i modulo l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, et $[x_i]$ la classe de la suite (x_i) dans $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ (une référence pour les ultraproduits est ([1])).

Dans l'espace $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$, on a une "distance" $d^\star = [d_i]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R}^\mathbb{N}/\mathcal{U}$.

Pour obtenir un espace muni d'une distance à valeurs dans $\mathbb{R}$, définissons l'ensemble suivant :

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\star} E_i/\mathcal{U} \;=\; \left\{[x_i] \in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U} \;\middle|\; \sup_{i\in\mathbb{N}} d_i(x_i, e_i) < +\infty\right\} \Big/ \approx$$

où $\approx$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble

$$\left\{[x_i] \in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U} \;\middle|\; \sup_{i\in\mathbb{N}} d_i(x_i, e_i) < +\infty\right\}$$

définie par :

$$x \approx y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{st}\big(d_i(x_i,y_i)\big)^{\sim} = \;0,$$

où $x=[x_i]$, $y=[y_i]$, $(r_i)^{\sim}$ désigne la classe de la suite de réels (r_i) dans $\mathbb{R}^{\star}$ et $\mathrm{st}(r_i)^{\sim}$ désigne la partie standard de $(r_i)^{\sim}$ (c'est-à-dire l'unique réel standard tel que $(r_i)^{\sim} - \mathrm{st}(r_i)^{\sim}$ est infiniment petit).

Notons $(x_i)^{\approx}$ la classe d'équivalence de $[x_i]$ dans $\prod^{\star}_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$, et choisissons $e=(e_i)^{\approx}$ comme point de référence dans cet espace.

On définit une métrique d sur $\prod^{\star}_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ par :

$$d\big((x_i)^{\approx},(y_i)^{\approx}\big) \;=\; \mathrm{st}\big(d_i(x_i,y_i)\big)^{\sim}.$$

L'espace $E=\big(\prod^{\star}_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}, d\big)$ est appelé l'ultraproduit limité des espaces métriques E_i, ou, plus simplement, l'ultraproduit des espaces métriques E_i s'il n'y a pas de risque de confusion.

Remarques

(a) Une définition équivalence de l'espace $\prod^{\star}_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ est donnée par :

$$\prod_{i\in\mathbb{N}}{}^{\star} E_i/\mathcal{U} \;\cong\; F/\rho$$

où $F=\Big\{[x_i]\in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U} \;\Big|\; (d_i(x_i,e_i))^{\sim}\in\mathbb{R}^{\mathrm{fin}}\Big\}$ ($\mathbb{R}^{\mathrm{fin}}$ désignant l'ensemble des réels non standards finis) et $x\,\rho\,y \leftrightarrow (d_i(x_i,y_i))^{\sim}$ est infiniment petit.

(b) L'espace $\prod^{\star}_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ dépend du choix des e_i. Cependant, on peut facilement montrer que si $\{i\in\mathbb{N} \mid E_i \text{ est homogène}\}\in\mathcal{U}$ alors les espaces obtenus à partir de deux suites différentes $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de points de références sont isométriques.

Propriétés

(a) *E est complet.*

(b) *Si $\{i\in\mathbb{N} \mid E_i$ est homogène$\}\in\mathcal{U}$, alors E est homogène.*

(c) *Supposons que l'on se trouve dans le cas particulier où chaque* *distance d_i peut se mettre sous la forme $d_i = d'_i/n_i$, où d'_i est une distance sur E_i à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de naturels tendant vers l'infini.*

Nous dirons que (E_i, d'_i) a la P.C.D. (propriété de connexité discrète) *si, pour $x, y \in E_i$, on a:*

$$d'_i(x,y) = n \;\Rightarrow\; \exists x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y : d'_i(x_j, x_{j+1}) = 1 \quad \textit{pour } 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

Si $\{i \in \mathbb{N} \mid E_i$ a la P.C.D.$\} \in \mathcal{U}$, alors E est connexe par arcs (donc connexe).

Remarque. $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ est un espace métrique nonstandard (voir [5], p. 62), et l'espace $\prod^\star_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ est exactement le “nonstandard hull” de $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$. On en déduit que $\prod^\star_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ est un espace métrique complet ([5], p. 62, proposition III.3.6). Nous donnons cependant la preuve dans ce cas particulier afin de faciliter la lecture de notre article.

Preuve. — **(a)** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \;\; \exists M(k) \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geqslant M(k) \quad d(x_n, x_m) < \frac{1}{k}.$$

Posons $x_n = (x_{n,i})^{\approx}$, on a $[x_{n,i}] \in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ et $(d_i(x_{n,i}, x_{m,i}))^\sim < 1/k$ si $n, m \geqslant M(k)$.

Les ensembles $A_k = \{x = [x_i] \in \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U} \mid \big(d_i(x_i, x_{M(k),i})\big)^\sim < 1/k\}$ sont définissables.

De plus $\bigcap_{\ell\leqslant k} A_\ell \neq \varnothing$ car $[x_{n,i}] \in \bigcap_{\ell\leqslant k} A_\ell$ si $n \geqslant \max\limits_{\ell\leqslant k} M(\ell)$. Comme $\prod_{i\in\mathbb{N}} E_i/\mathcal{U}$ est $\aleph_1$-saturé ([1]), on a

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_k \neq \varnothing.$$

Soit $[x_i] \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} A_k$. On a alors

$$\big(d_i(x_i, e_i)\big)^\sim \;\leqslant\; \big(d_i(x_i, x_{M(k),i})\big)^\sim + \;\big(d_i(x_{M(k),i}\,, e_i)\big)^\sim \;<\; +\infty.$$

On peut donc considérer $x = (x_i)^{\approx} \in E$. De plus, on a :

$$\big(d_i(x_i, x_{n,i})\big)^{\sim} \leqslant \big(d_i(x_i, x_{M(k),i})\big)^{\sim} + \big(d_i(x_{M(k),i}, x_{n,i})\big)^{\sim}.$$

Donc $(d_i(x_i, x_{n,i}))^{\sim} < 2/k$ si $n \geqslant M(k)$, autrement dit $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

(b) Soient $x, y \in E$, on veut trouver σ une isométrie de E telle que $\sigma(x) = y$.

Posons $x = (x_i)^{\approx}$, $y = (y_i)^{\approx}$ et $I = \big\{i \in \mathbb{N} \mid E_i \text{ est homogène}\big\}$.

Pour $i \in I$, il existe une isométrie σ_i de E_i telle que $\sigma_i(x_i) = y_i$. Pour $i \notin I$, on pose $\sigma_i = \mathbf{1}_{E_i}$. On a alors $[\sigma_i(x_i)] = [y_i]$ donc $(\sigma_i(x_i))^{\approx} = (y_i)^{\approx}$. On a aussi, pour $z_1 = (z_{1,i})^{\approx}$, $z_2 = (z_{2,i})^{\approx} \in E$:

$$\big(d_i(\sigma_i(z_{1,i}), \sigma_i(z_{2,i}))\big)^{\sim} = \big(d_i(z_{1,i}, z_{2,i})\big)^{\sim} = d(z_1, z_2).$$

Enfin, si $z = (z_i)^{\approx} \in E$, alors

$$\begin{aligned} \big(d_i(\sigma_i(z_i), e_i)\big)^{\sim} &\leqslant \big(d_i(\sigma_i(z_i), \sigma_i(x_i))\big)^{\sim} + \big(d_i(\sigma_i(x_i), e_i)\big)^{\sim} \\ &\leqslant \big(d_i(z_i, x_i)\big)^{\sim} + \big(d_i(y_i, e_i)\big)^{\sim} < +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\sigma = (\sigma_i)^{\approx}$ (définie par $\sigma\left((z_i)^{\approx}\right) = (\sigma_i(z_i))^{\approx}$) est une isométrie de E qui envoie x sur y.

(c) Par hypothèse, on a $d_i = d'_i/n_i$ avec $d'_i : E_i \times E_i \to \mathbb{N}$ et $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de naturels tendant vers l'infini.
Soient $x = (x_i)^{\approx}$ et $y = (y_i)^{\approx}$ dans E et supposons $d(x, y) = r$ c'est-à-dire

$$\operatorname{st}\left(\frac{d'_i(x_i, y_i)}{n_i}\right)^{\sim} = r.$$

On veut trouver une isométrie $f : [0, r] \to E$ telle que $f(0) = x$ et $f(r) = y$.
Posons

$$\frac{m_i}{n_i} = \frac{d'_i(x_i, y_i)}{n_i} = d_i(x_i, y_i) \qquad (m_i \in \mathbb{N})$$

et

$$I = \big\{i \in \mathbb{N} \mid E_i \text{ a la P.C.D.}\big\}.$$

- Si $i \in I$, on peut trouver $x_0^i = x_i, x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i = y_i$ dans E_i tels que $d_i'(x_j^i, x_{j+1}^i) = 1$ pour $0 \leqslant j \leqslant m_i - 1$.
- Si $i \notin I$, on choisit des éléments quelconques $x_0^i, x_1^i, \ldots, x_{m_i}^i$ dans E_i de telle façon que $x_0^i = x_i$ et $x_{m_i}^i = y_i$.

On a donc $x = (x_0^i)^{\approx}$ et $y = (x_{m_i}^i)^{\approx}$.

Soit $s \in [0, r]$, posons :

$$f(s) = \left(x_{a_i}^i\right)^{\approx} \quad \text{avec } a_i = E\left(\frac{s m_i}{r}\right)$$

(où E désigne la partie entière). Alors

$$f(0) = (x_0^i)^{\approx} = x \quad \text{et} \quad f(r) = \left(x_{m_i}^i\right)^{\approx} = y.$$

On vérifie de plus facilement que f est une isométrie. □

4. Limites d'espaces métriques

4.1. Distance entre deux espaces métriques

Les notions de distances que nous allons donner ici sont les définitions adaptées par Tits des distances utilisées par Gromov pour démontrer son résultat ([9], [3]). Les définitions de ces distances ainsi que les démonstrations détaillées de leurs propriétés sont aussi reprises dans ([11], chapitre IV).

4.1.1. Distance entre deux sous-espaces d'un espace métrique

Soit Z un espace muni d'une métrique δ. Soient X, Y deux sous-espaces fermés de Z. On définit les ϵ-voisinages de X et Y respectivement par :

$$U_\epsilon(X) = \{z \in Z \mid \exists x \in X : \delta(x, z) \leqslant \epsilon\}$$
$$\text{et} \quad U_\epsilon(Y) = \{z \in Z \mid \exists y \in Y : \delta(y, z) \leqslant \epsilon\}.$$

On peut alors définir une distance H^δ ("distance de Hausdorff") entre ces deux sous-espaces par :

$$H^\delta(X,Y) = \inf\{\epsilon > 0 \mid Y \subset U_\epsilon(X) \text{ et } X \subset U_\epsilon(Y)\}\,.$$

Cette distance peut être infinie mais possède toutes les propriétés d'une métrique.

4.1.2. Distance de Hausdorff entre deux espaces compacts

Soient X, Y deux espaces métriques et soit $Z = X \overset{\circ}{\cup} Y$ leur union disjointe. Une métrique sur Z est dite admissible si ses restrictions à X et à Y sont égales respectivement aux métriques de départ dans X et Y.

Par exemple, si d_X et d_Y sont les métriques dans X et Y, et si x_0, y_0 sont des points de référence dans X et Y, alors la métrique δ sur $Z = X \overset{\circ}{\cup} Y$ définie de la manière suivante est admissible :

$$\begin{array}{rcll} \delta(x,x') & = & d_X(x,x') & \text{si } x,x' \in X, \\ \delta(y,y') & = & d_Y(y,y') & \text{si } y,y' \in Y, \\ \delta(x,y) & = & d_X(x_0,x) + d_Y(y_0,y) + C & \text{si } x \in X, y \in Y, \end{array}$$

où C est une constante strictement positive.

Lorsque X et Y sont des espaces compacts, la distance de Hausdorff entre X et Y est définie par :

$$H(X,Y) = \inf_\delta H^\delta(X,Y),$$

où δ parcourt toutes les distances admissibles sur $Z = X \overset{\circ}{\cup} Y$.

Cette distance de Hausdorff possède toute les propriétés d'une métrique "à une isométrie près" c'est-à-dire $H(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ sont isométriques (voir [3], [9] ou [11]).

4.1.3. Distance entre deux espaces métriques propres

Rappelons qu'un espace métrique X est dit propre si toute boule fermée de rayon fini de X est compacte.

Pour définir une “distance” entre deux espaces métriques propres, on choisit un point de référence dans chacun de ces espaces.

Soient donc (X, x_0), (Y, y_0) deux espaces métriques pointés propres et δ une distance admissible sur $Z = X \mathring{\cup} Y$. On pose :

$$h((X,x_0),(Y,y_0),\delta) = \inf\Big\{\epsilon > 0 \mid \delta(x_0,y_0) \leqslant \epsilon, \quad B_{x_0}(1/\epsilon) \subset U_\epsilon(Y) \\ \text{et} \quad B_{y_0}(1/\epsilon) \subset U_\epsilon(X)\Big\}$$

(les inclusions sont considérées relativement à δ).

On définit alors :

$$\tilde{H}((X,x_0),(Y,y_0)) \;=\; \inf_{\delta} h((X,x_0),(Y,y_0),\delta),$$

où δ parcourt toutes les distances admissibles sur $Z = X \mathring{\cup} Y$. $\tilde{H}$ est une sorte de “distance de Hausdorff” modifiée entre (X, x_0) et (Y, y_0).

Propriétés (voir [3], [9] ou [11])

(a) $\tilde{H}((X,x_0),(Y,y_0)) = \tilde{H}((Y,y_0),(X,x_0))$

(b) $\tilde{H}((X,x_0),(Y,y_0)) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ *sont isométriques*

(c) *Soit (Z, z_0) un troisième espace métrique pointé propre, alors :*

$$\tilde{H}\big((X,x_0),(Y,y_0)\big) + \tilde{H}\big((Y,y_0),(Z,z_0)\big) \geqslant \tilde{H}\big((X,x_0),(Z,z_0)\big)$$

si les distances $\tilde{H}((X,x_0),(Y,y_0))$ et $\tilde{H}((Y,y_0),(Z,z_0))$ sont suffisamment petites (disons $< 1/2$).

4.2. Limites d'espaces métriques

4.2.1. Convergence

Soient (X_j, x_j) des espaces métriques pointés propres, $j \in \mathbb{N}$.

On dit que cette suite d'espaces *converge* vers un espace métrique pointé propre (Y, y), ce que l'on note $(X_j, x_j) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} (Y, y)$, ssi

$$\lim_{j\to+\infty} \tilde{H}((X_j, x_j), (Y, y)) = 0.$$

Si $\{(X_j, x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'espaces métriques pointés propres, alors cette suite est de Cauchy (pour la distance $\tilde{H}$) et la limite est unique à une isométrie près.

Proposition 3 (voir [3], [9] ou [11])

Si les espaces X_j sont compacts et de diamètres uniformément bornés, et si $(X_j, x_j) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} (Y, y)$, alors $\lim\limits_{j\to+\infty} H(X_j, Y) = 0$.

4.2.2. Suites uniformément compactes d'espaces métriques

Définition. Une famille $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ d'espaces métriques compacts est dite *uniformément compacte* si les diamètres des X_j sont uniformément bornés et si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

(a) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N = N(\epsilon)$ tel que chaque espace X_j, $j \in \mathbb{N}$, peut être recouvert par N boules de rayon ϵ ;

(b) pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M = M(\epsilon)$ tel que, dans chaque espace X_j, $j \in \mathbb{N}$, on peut trouver au plus M boules disjointes de rayon ϵ. □

Critère de compacité. *Soit $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques compacts uniformément compacte. Alors il existe une sous-suite $\{X_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (avec $\lim_{k\to+\infty} j_k = +\infty$) qui converge pour la distance de Hausdorff H vers l'espace métrique compact $Y = \left(\prod^{\star}_{k\in\mathbb{N}} X_{j_k}/\mathcal{U}, d\right)$ (où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$).*

Dans [3], l'existence d'une sous-suite convergeant vers un espace métrique compact est démontrée. Nous montrons de plus que la limite de cette sous-suite est isométrique à l'ultraproduit des éléments de cette sous-suite.

Notre preuve se fait en trois lemmes, le premier reprenant la première partie de la preuve de Gromov ([3]).

Lemme 4. *Si la famille $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ d'espaces métriques compacts est uniformément compacte, alors il existe un espace métrique compact F tel que chaque X_j peut être envoyé isométriquement dans F.*

PREUVE (voir [3]). — Considérons la suite de réels $\epsilon_i = 2^{-i}$, $i \geqslant 1$, et soit $N_i \in \mathbb{N}$ tel que chaque X_j, $j \in \mathbb{N}$, peut être recouvert par N_i boules de rayon ϵ_i.

Notons A_i l'ensemble de toutes les suites finies de la forme $(n_1, n_2, \dots, n_i)$, avec $1 \leqslant n_1 \leqslant N_1$, $1 \leqslant n_2 \leqslant N_2, \dots, 1 \leqslant n_i \leqslant N_i$, et soit $p_i : A_{i+1} \to A_i$ la projection naturelle.

Alors, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, il existe des applications $I_j^i : A_i \to X_j$ possédant les propriétés suivantes :

(a) l'image de I_j^i forme un ϵ_i-filtre dans X_j, i.e. les boules de rayon ϵ_i centrées en les points de cette image recouvrent X_j ;

(b) pour chaque $a \in A_{i+1}$ $(i \geqslant 1)$, le point $I_j^{i+1}(a)$ est contenu dans la boule de rayon $2\epsilon_i$ centrée en $I_j^i(p_i(a))$.

En effet, chaque X_j est recouvert par N_1 boules de rayon ϵ_1. On définit I_j^1 comme étant une bijection quelconque de A_1 sur les centres de ces boules.

Supposons maintenant que les applications I_j^i ont été construites pour chaque $j \in \mathbb{N}$. Dans chaque X_j, couvrons chaque boule de rayon ϵ_i par au plus N_{i+1} boules de rayon ϵ_{i+1}, et appliquons surjectivement A_{i+1} sur l'ensemble des centres de ces boules de rayon ϵ_{i+1} de telle façon que $(n_1, n_2, \dots, n_{i+1}) \in A_{i+1}$ soit envoyé sur le centre d'une des boules de rayon ϵ_{i+1} qui recouvrent la boule de rayon ϵ_i centrée en $I_j^i(n_1, n_2, \dots, n_i)$. Cela définit les applications I_j^{i+1}.

Notons $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ et $I_j : A \to X_j$ l'application correspondant à tous les I_j^i $(i \geqslant 1)$.

Soit F' l'espace de toutes les fonctions bornées de A dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{a\in A} |f(a)|$, et soit $F \subset F'$ l'ensemble de toutes les fonctions de F' vérifiant :

$$\begin{cases} \text{si } a \in A_1, \text{ alors } 0 \leqslant f(a) \leqslant \sup\limits_j \operatorname{diam}(X_j)\,; \\ \text{si } a \in A_i,\ i > 1, \text{ alors } |f(a) - f(p_{i-1}(a))| \leqslant 2\epsilon_{i-1}. \end{cases}$$

F est un espace compact.

Définissons les applications $h_j : X_j \to F'$ $(j \in \mathbb{N})$ comme suit :

$$\big(h_j(x)\big)(a) = d_j\big(x, I_j(a)\big), \quad \text{où } x \in X_j, a \in A$$

(d_j désigne la métrique sur X_j).

Alors, pour chaque $j \in \mathbb{N}$, h_j est une isométrie et l'image de h_j est incluse à F ([11], chapitre IV). □

Remarquons que, pour terminer la preuve du critère de compacité, Gromov utilise le résultat suivant :

> *Si F est un espace métrique compact avec une métrique δ, alors l'espace de toutes les parties compactes de F est un espace compact relativement à la distance de Hausdorff H^δ.*

En identifiant chaque X_j avec son image $h_j(X_j)$ dans F, cela lui permet de trouver une sous-suite $\{X_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un espace métrique compact $Y \subseteq F$, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} H^\delta(X_{j_k}, Y) = 0$, où δ est la métrique associée à la norme dans $F' \supset F$.

On a donc aussi $\lim\limits_{k\to+\infty} H(X_{j_k}, Y) = 0$.

Nous n'allons pas procéder de cette manière mais terminer la preuve du critère de compacité grâce aux deux lemmes suivants.

Lemme 5. *La suite $\{h_j(X_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces compacts de F admet une sous-suite de Cauchy pour la distance de Hausdorff H^δ, où δ est la métrique associée à la norme sur $F' \supset F$.*

Preuve. — Comme $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ est dénombrable, on peut écrire $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, et on suppose qu'il existe $n_0 = 0 < n_1 < \cdots < n_i < \cdots$ tels que, pour chaque $i \geqslant 1$, $A_i \subset \{a_n : n_{i-1} \leqslant n \leqslant n_i\}$.

Considérons la suite $\big\{h_j(I_j(a_0))\big\}_{j\in\mathbb{N}}$. Comme F est compact, cette suite admet une sous-suite convergente $\big\{h_j(I_j(a_0))\big\}_{j\in J_0}$.

La suite $\big\{h_j(I_j(a_1))\big\}_{j\in J_0}$ admet une sous-suite convergente $\big\{h_j(I_j(a_1))\big\}_{j\in J_1}$ $(J_1 \subset J_0)$.

Plus généralement, pour $n \geqslant 1$, la suite $\{h_j(I_j(a_n))\}_{j\in J_{n-1}}$ admet une sous-suite convergente $\{h_j(I_j(a_n))\}_{j\in J_n}$ $(J_n \subset J_{n-1})$.

Soit $J = \operatorname{Diag} J_n$ l'ensemble des indices dont le n-ième élément est le n-ième élément de J_n.

On peut alors montrer que la suite $\{h_j(X_j)\}_{j\in J}$ est de Cauchy pour la distance H^δ. □

Lemme 6. *La sous-suite obtenue au lemme 5 converge pour la distance de Hausdorff vers l'ultraproduit des espaces métriques X_j, $j \in J$, i.e. :*

$$\lim_{j\to+\infty} H\Big(X_j, \prod_{k\in J}{}^{\star} X_k/\mathcal{U}\Big) \;=\; 0$$

(où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur J).

Preuve. — Si $j \in J$, on a une isométrie $h_j : X_j \to F'$ définie par $(h_j(x))(a) = d_j(x, I_j(a))$, avec $x \in X_j$, $a \in A$.

Définissons l'application $h : \prod^\star_{k\in J} X_k/\mathcal{U} \to F'$ par

$$h = (h_k)^{\approx} \quad \text{ i.e. } \big(h(x)\big)(a) = \operatorname{st}\big(d_k(x_k, I_k(a))\big)^{\sim}$$

avec $x = (x_k)^{\approx} \in \prod^\star_{k\in J} X_k/\mathcal{U}$ et $a \in A$.

Alors h est une isométrie et l'image de h est contenue dans F ([11], chapitre IV).

Soit $\epsilon > 0$, on peut alors montrer que

$$\lim_{\substack{j\to+\infty\\ j\in J}} H^\delta\Big(X_j, \prod_{k\in J}{}^{\star} X_k/\mathcal{U}\Big) = 0,$$

où δ est la métrique admissible sur $X_j \mathring{\cup} \prod^\star_{k\in J} X_k/\mathcal{U}$ définie par :

$$\delta(x_j, x) = \|h_j(x_j) - h(x)\| + \epsilon,$$

si $x_j \in X_j$ et $x \in \prod^\star_{k\in J} X_k/\mathcal{U}$.

On en déduit finalement que

$$\lim_{\substack{j \to +\infty \\ j \in J}} H\Big(X_j, \prod_{k \in J}^{\star} X_k/\mathcal{U}\Big) = 0.$$

□

Corollaire du critère de compacité. *Soit $\{(Y_j, y_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques pointés propres. Si, pour chaque $n \geqslant 1$, $\big\{B_{y_j}(n)\big\}_{j \in \mathbb{N}}$ est une famille uniformément compacte (où $B_{y_j}(n)$ est la boule de centre y_j et de rayon n dans Y_j), alors il existe une sous-suite $\{(Y_j, y_j)\}_{j \in J}$ de $\{(Y_j, y_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ telle que :*

$$(Y_j, y_j) \underset{\substack{j \to +\infty \\ j \in J}}{\longrightarrow} \Big(\prod_{k \in J}^{\star} Y_k/\mathcal{U}, y\Big),$$

où $y = (y_k)^{\approx}$ est le point de référence dans $\prod^{\star}_{k \in J} Y_k/\mathcal{U}$ (et $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur J).

Preuve. — Posons $X_{j,n} = B_{y_j}(n)$.

Comme $\{X_{j,n}\}_{j \in \mathbb{N}}$ est uniformément compacte ($n \geqslant 1$), on peut appliquer le critère de compacité.

En particulier, on en déduit qu'il existe $J_1 \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\{X_{j,1}\}_{j \in J_1}$ converge.

On a aussi que $\{X_{j,2}\}_{j \in J_1}$ est uniformément compacte, donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $\{X_{j,2}\}_{j \in J_2}$ converge.

Plus généralement, si $n \geqslant 2$, $\{X_{j,n}\}_{j \in J_{n-1}}$ est uniformément compacte, donc il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $\{X_{j,n}\}_{j \in J_n}$ converge.

Soit $J = \operatorname{Diag} J_n$ l'ensemble d'indices dont le n-ième élément est le n-ième élément de J_n.

Comme au lemme 6, on peut alors montrer que, pour chaque $n \geqslant 1$:

$$X_{j,n} \underset{\substack{j \to +\infty \\ j \in J}}{\longrightarrow} \prod_{k \in J}^{\star} X_{k,n}/\mathcal{U}$$

pour la distance de Hausdorff H (où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur J).

On veut maintenant montrer que :

$$(Y_j, y_j) \underset{\substack{j\to+\infty \\ j\in J}}{\longrightarrow} \Big(\prod_{k\in J}{}^{\star} Y_k/\mathcal{U}, y\Big) \quad (\text{où } y = (y_k)^{\approx}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\forall\epsilon > 0 \ \exists j_0 \ \forall j \geqslant j_0, j \in J \\ &\qquad \exists\delta \text{ distance admissible sur } Y_j \mathbin{\mathring{\cup}} \prod_{k\in J}{}^{\star} Y_k/\mathcal{U} \\ &\qquad\qquad h\left((Y_j, y_j), \Big(\prod_{k\in J}{}^{\star} Y_k/\mathcal{U}, y\Big), \delta\right) \leqslant \epsilon. \end{aligned}$$

Appliquons pour cela aux $X_{j,n}$ (pour chaque $n \geqslant 1$) la construction faite dans la démonstration du critère de compacité.

Soit A_i^n le réseau d'ordre ϵ_i associé aux $X_{j,n}, j \in J$, et soient $I_{j,n}^i : A_i^n \to X_{j,n}$ les applications correspondantes.

Pour $i \geqslant 1$, on peut toujours choisir $a(i) \in A_i^n$ de telle façon que $p_i(a(i+1)) = a(i)$ et que les applications $I_{j,n}^i$ vérifient :

$$\forall j \in J \quad d_j\big(y_j, I_{j,n}^i(a(i))\big) \leqslant \epsilon_i$$

(i.e. $a(i)$ est envoyé sur le centre de la boule de rayon ϵ_i comprenant y_j du recouvrement de $X_{j,n}$).

Soient $h_{j,n} : X_{j,n} \to F$ et $h_n : \prod_{j\in J}^{\star} X_{j,n}/\mathcal{U} \to F$ les isométries correspondantes.

On peut aussi supposer que, pour chaque $n \geqslant 1$, pour chaque $j \in J$, $h_{j,n+1}$ prolonge $h_{j,n}$ (i.e. on prolonge les recouvrements de $X_{j,n}$ en des recouvrements de $X_{j,n+1}$), ce qui implique que h_{n+1} prolonge h_n.

Soit $\epsilon > 0$ et fixons $j \in J$.

Soit δ la distance admissible sur $Y_j \mathbin{\mathring{\cup}} \prod_{k\in J}^{\star} Y_k/\mathcal{U}$ définie par :

si $x_j \in Y_j$ et $(z_k)^{\approx} \in \prod_{k\in J}{}^{\star} Y_k/\mathcal{U}$,
alors il existe $n \geqslant 1$ tel que $x_j \in X_{j,n}$ et $(z_k)^{\approx} \in \prod_{k\in J}{}^{\star} X_{k,n}/\mathcal{U}$;

on pose alors :

$$\delta\left(x_j,(z_k)^{\approx}\right) \;=\; \|h_{j,n}(x_j) - h_n((z_k)^{\approx})\| + \frac{\epsilon}{2}$$

(δ est bien une distance car $h_{j,n+1}$ prolonge $h_{j,n}$ pour chaque $n \geqslant 1$, pour chaque $j \in J$).

On peut alors montrer qu'il existe j_0 tel que, pour $j \geqslant j_0$, $j \in J$, on ait :

$$h\left((Y_j,y_j)\,,\Big(\prod_{k\in J}{}^{\star}Y_k/\mathcal{U},y\Big),\delta\right) \leqslant \epsilon.$$

On en déduit :

$$\forall\epsilon>0\;\;\exists j_0\;\;\forall j\geqslant j_0, j\in J\quad \tilde{H}\left((Y_j,y_j)\,,\Big(\prod_{k\in J}{}^{\star}Y_k/\mathcal{U},y\Big)\right)\leqslant\epsilon,$$

ou encore :

$$\lim_{\substack{j\to+\infty\\ j\in J}}\tilde{H}\left((Y_j,y_j)\,,\Big(\prod_{k\in J}{}^{\star}Y_k/\mathcal{U},y\Big)\right)=0.$$

□

De plus, si les espaces Y_j vérifient les hypothèses du corollaire, alors l'espace limite $Y = \left(\prod_{k\in J}{}^{\star}Y_k/\mathcal{U},y\right)$ possède les propriétés suivantes.

Proposition 7. *Soit $\{(Y_j,y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques pointés propres et supposons que, pour chaque $n \geqslant 1$, la famille $\left\{B_{y_j}(n)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ est uniformément compacte. Fixons $k \geqslant 1$. Pour $n \geqslant 1$, choisissons $j_0 = j_0(n,k) \in \mathbb{N}$ et notons $N_n(k,j_0)$ le nombre de boules des recouvrements des $B_{y_j}(n)$ par des boules de rayon 2^{-k}, pour $j \geqslant j_0$.*

Soit $Y = \left(\prod^{\star}_{j\in J}Y_j/\mathcal{U},y\right)$ l'espace limite d'une sous-suite convergente $\{(Y_j,y_j)\}_{j\in J}$ de $\{(Y_j,y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$. Si cet espace limite est homogène, alors :

(a) *Y est localement compact,*

(b) *Supposons qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que, pour chaque $n \geqslant 1$, pour* *chaque $k \geqslant 1$, on peut choisir j_0 de telle façon que*

$$\lim_{k \to +\infty} N_n(k, j_0) \cdot 2^{-kd'} = 0$$

pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $d' > d$. Alors Y est de dimension de Hausdorff $\leqslant d$.

Rappelons ici la définition de la dimension de Hausdorff d'un espace métrique.

Définition ([4])

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $p \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant p < +\infty$, et soit $\epsilon > 0$; posons

$$m_p^\epsilon(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} [\delta(F_i)]^p ,$$

où $E = F_1 \cup F_2 \cup \cdots$ est une quelconque décomposition de E en un nombre dénombrable de parties de diamètre $\leqslant \epsilon$, et $\delta(F_i)$ est le diamètre de F_i (i.e. $\delta(F_i) = \sup_{x, x' \in F_i} d(x, x')$, et on prend comme convention que $[\delta(F_i)]^0 = 0$ si $F_i = \varnothing$ et $[\delta(F_i)]^0 = 1$ si $F_i \neq \varnothing$).

On définit alors la *p-mesure* de E par :

$$m_p(E) = \sup_{\epsilon > 0} m_p^\epsilon(E).$$

On montre facilement que, si $p < q$, alors $m_p(X) \geqslant m_q(X)$. Ceci nous permet de définir la *dimension de Hausdorff* de E par :

$$\text{H-dim } E = \sup \{ p \in \mathbb{R} \mid m_p(E) > 0 \} .$$

□

Remarquons que l'on a toujours dim $E \leqslant$ H-dim E, où dim E est la dimension topologique de E ([4]).

Lemme 8 ([11])

Soit Y un espace métrique localement compact. Pour que Y soit de dimension de Hausdorff $\leqslant d$, il suffit que toute boule de Y soit de dimension de Hausdorff $\leqslant d$.

PREUVE de la proposition 7 :

(a) Fixons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, k \geqslant 1$.
Pour un $j \in J$, $j \geqslant j_0 = j_0(n,k)$, notons $x_1(j), x_2(j), \ldots, x_{N_n(k,j_0)}(j)$ les centres des boules de rayon 2^{-k} qui recouvrent $B_{y_j}(n)$. On a :

$$Y_j \vDash \ (\exists x_1(j), x_2(j), \ldots, x_{N_n(k,j_0)}(j)) \\ \Big(d_j(x, y_j) \leqslant n \ \rightarrow \bigvee_{h=1}^{N_n(k,j_0)} d_j(x, x_h(j)) \leqslant 2^{-k}\Big).$$

Posons

$$x_1 = [x_1(j)]\,, x_2 = [x_2(j)]\,, \ldots, x_{N_n(k,j_0)} = \left[x_{N_n(k,j_0)}(j)\right].$$

Alors, on a (puisque $\mathcal{U}$ est non principal) :

$$\prod_{j \in J} Y_j/\mathcal{U} \vDash \ (\exists x_1, x_2, \ldots, x_{N_n(k,j_0)}) \\ \Big((d_j(x_j, y_j))^{\sim} \leqslant n \ \rightarrow \bigvee_{h=1}^{N_n(k,j_0)} (d_j(x_j, x_h(j)))^{\sim} \leqslant 2^{-k}\Big).$$

Comme on est à distance finie, on peut passer à l'espace $\prod_{j \in J}{}^{\star} Y_j/\mathcal{U}$, et on a :

$$\prod_{j \in J}{}^{\star} Y_j/\mathcal{U} \vDash \ (\exists x'_1, x'_2, \ldots, x'_{N_n(k,j_0)}) \\ \Big(d(x, y) \leqslant n \ \rightarrow \bigvee_{h=1}^{N_n(k,j_0)} d(x, x'_h) \leqslant 2^{-k}\Big)$$

où $y = (y_j)^{\approx}$, $d(u,v) = \mathrm{st}\,(d_j(u_j, v_j))^{\sim}$ et $x'_h = (x_h(j))^{\approx}$ pour $h = 1, 2, \ldots, N_n(k, j_0)$.

On en déduit que la boule de rayon n (centrée en y) dans Y est recouverte par au plus $N_n(k, j_0)$ boules de rayon 2^{-k}, et cela quels que soient $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

Ces boules sont donc précompactes. Comme Y est complet, elles sont aussi à compacité dénombrable, donc compactes puisque Y est un espace métrique. Comme Y est homogène, toute boule de Y est compacte.

(b) Par le lemme 8, il suffit de démontrer que toute boule de Y est de dimension de Hausdorff $\leqslant d$. Par homogénéité de Y, il suffit de le prouver pour toute boule centrée en y.

Soit $B(n)$ la boule de centre y et de rayon n dans Y. On a prouvé au point (a) que $B(n)$ peut être recouverte par $N_n(k, j_0)$ boules de rayon 2^{-k} (pour chaque $k \geqslant 1$).

Fixons $n \geqslant 1$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $k \geqslant 1$ tel que $2^{-k} < \epsilon$. Alors $m_p^\epsilon(B(n)) \leqslant N_n(k, j_0) \cdot 2^{-kp}$ et c'est vrai quel que soit k tel que $2^{-k} < \epsilon$, c'est-à-dire pour k suffisamment grand.

Or, par hypothèse, si $p > d$, alors $\lim_{k \to +\infty} N_n(k, j_0) 2^{-kp} = 0$. Donc $m_p^\epsilon(B(n)) = 0$ si $p > d$.

Comme c'est vrai quel que soit $\epsilon > 0$, on a $m_p(B(n)) = 0$ si $p > d$, i.e. H-dim$(B(n)) \leqslant d$. □

Dans la section suivante, nous allons examiner un cas particulier pour lequel l'hypothèse du point (b) de la proposition 7 pourra être vérifiée.

5. Espace métrique (continu) associé à un espace métrique discret

Soit (E, e, d) un espace métrique pointé propre, avec $d : E \times E \to \mathbb{N}$. Soit $B(n)$ la boule fermée de centre e et de rayon n dans E ($n \in \mathbb{N}$), $B(n)$ est finie. On note $G(n) = \#B(n)$, G est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ avec $G(0) = 1$.

Soit $(n_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de naturels tendant vers l'infini. Considérons les espaces métriques :

$$Y_j = \left(E, e, \frac{d}{n_j}\right) \quad (j \geqslant 1).$$

On peut appliquer les résultats obtenus aux sections précédentes aux espaces Y_j :

(a) L'espace $Y = \left(\prod_{j\geqslant 1}^{\star} Y_j/\mathcal{U}, y, d\right)$ (où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal), avec $y = (e)^{\approx}$ et $d\left((u_j)^{\approx}, (v_j)^{\approx}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{d}{n_j}(u_j, v_j)\right)^{\sim}$, est complet.

Si E est homogène, alors Y est homogène; si E a la P.C.D., alors Y est connexe par arcs.

(b) Si, pour chaque $n \geqslant 1$, la famille $\{B_j(n)\}_{j\geqslant 1}$ est uniformément compacte (où $B_j(n) = B(nn_j)$ est la boule de centre e et de rayon n dans Y_j), alors la suite $\{Y_j\}_{j\geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente $\{Y_j\}_{j\in J}$, dont la limite est isométrique à $Y = \left(\prod_{j\in J}^{\star} Y_j/\mathcal{U}, y, d\right)$ (avec $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur J).
Si E est homogène, alors cet espace limite Y est localement compact et de dimension de Hausdorff finie, lorsque le nombre de boules des recouvrements des $B_j(n)$ par des boules de rayon 2^{-k} ($k \geqslant 1$) "ne croît pas trop vite en fonction de k" (pour chaque $n \geqslant 1$).

Dans le cas particulier que nous envisageons ici, cette dernière condition est équivalente à une condition de régularité sur la suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$.

Définition. Une suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ est dite *régulière*, s'il existe deux familles de constantes $\{a(k)\}_{k\geqslant 1}$ et $\{b(k)\}_{k\geqslant 1}$ telles que, pour chaque $j \geqslant 1$, on ait :

(a) $G(n_j) \leqslant a(k) G\left(2^{-k} n_j\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, j,$

(b) $G\left(2^k n_j\right) \leqslant b(k) G(n_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, j$

(où l'on prend comme convention que, si $r \in \mathbb{R}^{\star}$, alors $G(r) = G(E(r))$, où $E(r)$ représente la partie entière de r). □

Proposition 9. *Supposons E homogène, alors la famille $\{B_j(2^n)\}_{j\geqslant 1}$ est uniformément compacte pour chaque $n \in \mathbb{N}$ ssi la suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ est régulière.*

Remarque. Pour que la famille $\{B_j(n)\}_{j\geqslant 1}$ soit uniformément compacte pour chaque $n \geqslant 1$, il suffit que cette condition soit vérifiée pour une suite de naturels tendant vers l'infini.

Preuve de la proposition. — Si la famille $\{B_j(2^n)\}_{j\geqslant 1}$ est uniformément compacte pour chaque $n \in \mathbb{N}$, alors :

- pour tout $k \geqslant 1$, il existe $a(k)$ tel que $B_j(1)$ est recouverte par $a(k)$ boules de rayon 2^{-k} quel que soit $j \geqslant 1$; donc $G(n_j) \leqslant a(k)G(2^{-k}n_j)$;

- pour tout $k \geqslant 1$, il existe $b(k)$ tel que $B_j(2^k)$ est recouverte par $b(k)$ boules de rayon 1, quel que soit $j \geqslant 1$; donc $G(2^k n_j) \leqslant b(k)G(n_j)$.

Supposons maintenant que la suite $(n_j)_{j\geqslant 1}$ est régulière. Pour chaque $j \geqslant 1$, on a alors :

- dans $B_j(1)$, on peut trouver au plus $a(k)$ boules disjointes de rayon 2^{-k}, $k = 1, 2, \ldots, j$;

- dans $B_j(2^k)$, on peut trouver au plus $b(k)$ boules disjointes de rayon 1, $k = 1, 2, \ldots, j$.

Soit $j \geqslant 2$, soit $k \in \{1, 2, \ldots, j\}$. On a donc :

- $B_j\,(1/2)$ peut être recouverte par $a(k)$ boules de rayon 2^{-k+1}, $k = 1, 2, \ldots, j$;

- $B_j(2^{k-1})$ peut être recouverte par $b(k)a(2)$ boules de rayon $1/2$, $k = 1, 2, \ldots, j$.

Finalement, on a que, si $j \geqslant \max(\ell, k)$, alors $B_j\left(2^{\ell-1}\right)$ est recouverte par au plus $b(\ell)a(2)a(k)$ boules de rayon 2^{-k+1}.

Ou encore, il existe j_0 tel que, si $j \geqslant j_0$, alors $B_j(2^n)$ est recouverte par au plus $b(n+1)a(2)a(k+1)$ boules de rayon 2^{-k} (j_0 est une fonction de k et de n). On a donc $N_n(k, j_0) = b(n+1)a(2)a(k+1)$. □

Corollaire 10. *S'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{k\to+\infty} a(k) \cdot 2^{-kd'} = 0$ pour chaque $d' > d$, alors Y est de dimension de Hausdorff $\leqslant d$.*

Nous allons maintenant montrer que, si l'espace métrique E vérifie certaines conditions, alors on peut construire une suite de naturels régulière tendant vers l'infini.

Proposition 11. *Soit (E, e, d) un espace métrique pointé propre, avec $d : E \times E \to \mathbb{N}$. Supposons que E a la P.C.D. (propriété de connexité discrète) i.e.*

> *si $d(x, e) = p$ (pour $x \in E$, $p \in \mathbb{N}$),*
> *alors il existe $x_0 = e, x_1, x_2, \dots, x_p = x$ dans E tels que $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ pour $i = 0, 1, \dots, p-1$.*

Si la fonction $G(n) = \#B(n)$ vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad G(2^k) \leqslant c \cdot 2^{kd},$$

où c, d sont deux constantes, alors il existe une suite $(n_j)_{j \geqslant 1}$ tendant vers l'infini et vérifiant, pour chaque $j \geqslant 1$:

(a) $\log\left(G\left(2^{-k} n_j\right)\right) \geqslant \log\left(G(n_j)\right) - k(d+1)\log 2 \qquad k = 1, 2, \dots, j\,;$

(b) $\log\left(G\left(2^{k} n_j\right)\right) \leqslant \log\left(G\left(n_j\right)\right) + 16^{k+1}(d+1) \qquad k = 1, 2, \dots, j.$

En particulier, cette suite est régulière avec $a(k) = 2^{k(d+1)}$ et $b(k) = e^{16^{k+1}(d+1)}$ (pour $k \geqslant 1$).

Preuve. — Il suffit de reprendre la preuve de l'existence d'une suite régulière donnée dans [3] : la suite $(n_j)_{j \geqslant 1}$ obtenue est une sous-suite de la suite des puissances de 2. □

Remarquons que, pour la suite régulière donnée dans cette proposition, on a $a(k) = 2^{k(d+1)}$, donc $\lim\limits_{k \to +\infty} a(k) \cdot 2^{-kd'} = 0$ si $d' > d + 1$. On a donc :

Proposition 12. *Soit (E, e, d) un espace métrique pointé propre homogène, avec $d : E \times E \to \mathbb{N}$. Supposons que E a la P.C.D. et que la fonction $G(n) = \#B(n)$ vérifie $G(2^k) \leqslant c \cdot 2^{kd}$ pour chaque $k \geqslant 0$ (c, d deux constantes).*

Soit $(n_j)_{j \geqslant 1}$ une suite régulière tendant vers l'infini.
Posons $Y_j = \big(E, e, d/n_j\big)$.

Alors la suite $\{Y_j\}_{j \geqslant 1}$ admet une sous-suite convergente $\{Y_j\}_{j \in J}$ (pour la distance de Hausdorff $\tilde{H}$) dont la limite est isométrique à $Y = \left(\prod_{j \in J}^{\star} Y_j / \mathcal{U}, y, d\right)$, où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur J, $y = (e)^{\approx}$

et $d\big((u_j)^{\approx}, (v_j)^{\approx}\big) = \mathrm{st}\left(\dfrac{d}{n_j}(u_j, v_j)\right)^{\sim}$.

De plus, cet espace limite Y possède les propriétés suivantes :

(a) *Y est complet,*

(b) *Y est homogène,*

(c) *Y est connexe par arcs,*

(d) *Y est localement compact,*

(e) *Y est de dimension de Hausdorff $\leqslant d+1$ (donc de dimension finie).*

Remarque. En regardant la preuve de l'existence d'une suite régulière tendant vers l'infini donnée dans [3], on voit que l'on peut prouver de la même façon l'existence d'une suite régulière tendant vers l'infini avec $a(k) = 2^{k(d+\epsilon)}$ et $b(k) = e^{16^{k+1}(d+\epsilon)}$ (pour chaque $k \geqslant 1$), et cela que que soit $\epsilon > 0$.

On en déduit que la dimension de Hausdorff de Y est en fait $\leqslant d$.

Corollaire 13.

(a) *Soit Γ un groupe de type fini et d la métrique définie sur Γ (voir section 2). Soit $(n_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de naturels tendant vers l'infini.*

Posons $\Gamma_j = (\Gamma, d/n_j)$ $(j \geqslant 1)$.

Alors l'espace $\big(\prod^{\star}_{j\geqslant 1} \Gamma_j/\mathcal{U}, e, d\big)$ (où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal) est homogène, complet et connexe par arcs.

(b) *Si Γ est à croissance polynomiale, alors il existe une suite régulière $(n_j)_{j\geqslant 1}$ tendant vers l'infini, et la suite $\{\Gamma_j\}_{j\geqslant 1}$ contient une sous-suite convergente $\{\Gamma_j\}_{j\in J}$ dont la limite est isométrique à l'espace $Y = \big(\prod^{\star}_{j\in J} Y_j/\mathcal{U}, e, d\big)$.*

De plus, l'espace limite Y est homogène, complet, connexe par arcs, localement compact et de dimension de Hausdorff $\leqslant d$ (où d est le degré de croissance de Γ).

PREUVE. — Il suffit de remarquer que tout groupe de type fini est un espace métrique homogène (car d est invariante à gauche) qui possède la P.C.D. □

Références

[1] P.C. Eklof. Ultraproducts for Algebraists. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 105–137. North-Holland, 1977.

[2] R.I. Grigorchuk. On Milnor's problem of group growth. *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 28, no. 1, pp. 23–26, 1983.

[3] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publ. Math. IHES*, Vol. 53, pp. 53–78, 1981.

[4] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*, chapter VII. Princeton U. Press, 1948.

[5] T. Lindstrøm. An invitation to nonstandard analysis. In Nigel Cutland, editor, *Nonstandard Analysis and its Applications*. Cambridge University Press, 1988.

[6] J. Milnor. Growth of finitely generated solvable groups. *J. Differential Geometry*, Vol. 2, pp. 447–449, 1968.

[7] R.G. Möller. Communication personnelle à F. Point, mars 1993.

[8] F. Point. Groups of Polynomial Growth and Their Associated Metric Spaces. *J. of Algebra*, Vol. 175, pp. 105–121, 1995.

[9] J. Tits. Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.). *Séminaire Bourbaki*, 33^{e}année, n^{o} 572, pp. 176–188, 1980–81.

[10] L. Van den Dries and A.J. Wilkie. Gromov's theorem on groups of polynomial growth and elementary logic. *J. of Algebra*, Vol. 89, pp. 349–374, 1984.

[11] P. Wantiez. Groupes à croissance polynomiale (Théorème de Gromov). Mémoire de Licence, Université de Mons-Hainaut, 1990.

[12] J.A. Wolf. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, Vol. 2, pp. 421–446, 1968.

Université de Mons–Hainaut
Institut de Mathématique et d'Informatique
Avenue Maistriau, 15
7000 Mons
Belgique
e-mail : wantiez@sun1.umh.ac.be