Cahiers du Centre de logique
Volume 9

Résolution d'équations différentielles par les méthodes infinitésimales

par

Y. Feneyrol–Perrin
Université Blaise Pascal

Dans cet exposé, nous mettons l'accent sur deux notions importantes, apportées par l'analyse non standard : celle d'ordre de grandeur et celle d'ensembles hyperfinis.

La notion d'ordre de grandeur des nombres a été abandonnée en même temps que l'utilisation des infiniment petits et infiniment grands au 19$^{\text{e}}$ siècle. En mathématiques classiques, il est interdit de dire qu'un nombre est grand ou petit. On peut seulement dire qu'un nombre est plus grand qu'un autre. Or la notion d'ordre de grandeur en absolu est précieuse aux utilisateurs des mathématiques : physiciens, astronomes, statisticiens... C'est une des raisons pour lesquelles le calcul infinitésimal a continué d'être pratiqué en dehors des mathématiques, dans d'autres sciences. Avec l'Analyse non standard on peut à nouveau parler de nombres infiniment grands, infiniment petits, limités, appréciables.

La notion d'ensembles hyperfinis, c'est-à-dire d'ensembles finis de cardinalité illimitée, est fondamentale dans la mesure où elle fait le lien entre le discret et le continu mathématiques. Pierre Cartier avait eu le dessein d'utiliser ces nouveaux moyens offerts par l'Analyse non standard pour refonder une partie des mathématiques sur des bases finitaires. J'ai participé à ce projet et le travail présenté ici a été fait en collaboration avec lui.

On se place dans le cadre axiomatique I.S.T. de E. Nelson, et on se propose de résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

où f est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles, dans l'optique d'un expérimentateur qui ne connaîtrait que les règles élémentaires du calcul algébrique.

1. Propriétés élémentaires des fonctions dérivées

Soit un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités limitées α, β. On considère une approximation infiniment fine de $[\alpha, \beta]$, c'est-à-dire une suite interne

$$T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_\nu = \beta\}$$

telle que, pour tout $i < \nu,\ t_i - t_{i+1}$ soit infinitésimal.

Selon les notations de Nelson, on désignera par $t + d_T t$ le successeur dans T du point t de T et s'il n'y a pas d'ambiguïté, on le notera simplement $t + dt$.

Définitions

Soit $x : T \to \mathbb{R}$ une fonction interne.

On dira que la fonction x est *continue au point* t de T si

$$(\forall u \in T)\ (u \simeq t\ \Rightarrow\ x(t) \simeq x(u)).$$

On appelle *dérivée* le long de T de la fonction x au point t de T, le nombre

$$x'(t) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}.$$

Toute fonction définie sur T a donc une dérivée le long de T.

On dira que la fonction x est *différentiable au point* t de T si

$$(\forall u \in T)\ \big(u \simeq t\ \Rightarrow\ \frac{x(u)-x(t)}{u-t} \simeq x'(t)\big).$$

Enfin on dira que la fonction x est *continue*, respectivement *différentiable* sur T, si elle l'est en tout point de T.

Enonçons quelques propriétés élémentaires qui nous servirons par la suite.

Proposition 1. *Si les valeurs de x' sont limitées, x est continue sur T.*

PREUVE. — Soient $t \in T$ et x un point de T infiniment proche de t. Supposons par exemple $t < u$, on a alors :

$$x(u) - x(t) \ = \sum_{t \leqslant s < u} x(s+ds) - x(s) \ = \sum_{t \leqslant s < u} x'(s)ds.$$

Notons M le plus grand des nombres $|x'(s)|$ pour $s \in T$. Il est limité, on a $|x(t) - x(u)| \leqslant M(u-t)$ et donc $x(t) - x(u)$ est infinitésimal. □

Proposition 2. *Si x' est une fonction continue sur T, alors x est différentiable sur T.*

PREUVE. — Soit t et u deux points de T infiniment proches, tels que $t < u$.

$$\frac{x(u)-x(t)}{u-t} \ = \ \frac{\displaystyle\sum_{t \leqslant s < u} x'(s)ds}{\displaystyle\sum_{t \leqslant s < u} ds}.$$

Notons m et M, respectivement le plus petit et le plus grand des nombres $x'(s)$ pour $t \leqslant s \leqslant u$. Par hypothèse on a $m \simeq x'(t)$ et $M \simeq x'(t)$, et pour $t \leqslant s \leqslant u$

$$m\ ds \ \leqslant\ x'(s)\ ds\ \leqslant M\ ds,$$

$$m(u-t) \ = \sum_{t \leqslant s < u} m\, ds \ \leqslant \sum_{t \leqslant s < u} x'(s)\, ds \ \leqslant \sum_{t \leqslant s < u} M\, ds \ = \ M(u-t),$$

donc

$$m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\sum_{t\leqslant s<u} x'(s)\; ds}{\displaystyle\sum_{t\leqslant s<u} ds} \;\leqslant\; M,$$

et par conséquent

$$\frac{x(u)-x(t)}{u-t} \;\simeq\; x'(t). \qquad \square$$

Proposition 3. *Soit x une fonction positive sur le quasi-intervalle T. On suppose qu'il existe une constante limitée k telle que, pour tout $t \in T$, on ait*

$$x'(t) \;\leqslant\; k\; x(t).$$

Alors :

- *Si $x(\alpha)$ est limité, $x(t)$ est limité quel que soit $t \in T$.*
- *Si $x(\alpha)$ est infinitésimal, $x(t)$ est infinitésimal quel que soit $t \in T$.*

Preuve. — Soit $t \in T$. Par hypothèse

$$|x(t+dt)-x(t)| \;\leqslant\; kx(t)dt,$$

donc

$$0 \leqslant x(t+dt) \;\leqslant\; x(t)\; (1+k\; dt),$$

donc

$$x(t+dt) \;\leqslant\; x(\alpha) \prod_{\alpha\leqslant s\leqslant t} (1+kds).$$

Les résultats énoncés dans la proposition 3, sont une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu$ une suite interne finie de nombres positifs. Si la somme $\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_\nu$ est limitée, alors le produit $(1+\varepsilon_1)\dots(1+\varepsilon_\nu)$ l'est aussi.*

Preuve du lemme. — Notons σ_p, pour $1 \leqslant p \leqslant \nu$, les fonctions symétriques élémentaires des ε_i. On a $\prod_{i=1}^{\nu}(1+\varepsilon_i) = \sum_{p=0}^{\nu}\sigma_p$. Par ailleurs, le développement de $s^p = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\nu)^p$ par la formule multinomiale contient une somme de termes égaux à $p!\,\sigma_p$ et des termes positifs. On a donc $\sigma_p \leqslant \dfrac{s^p}{p!}$. Choisissons un entier limité n tel que $n > s$. La somme $\sigma_0 + \cdots + \sigma_n$ est limitée, de plus, pour $k > 0$, on a

$$\sigma_{n+k} \;\leqslant\; \frac{s^{n+k}}{(n+k)!} \;\leqslant\; \frac{s^n}{n!}\Big(\frac{s}{n}\Big)^k,$$

et par conséquent, la somme $\sigma_{n+1}+\cdots+\sigma_\nu$ est majorée par $\dfrac{s^n}{n!}\Big(1-\dfrac{s}{n}\Big)^{-1}$, donc est limitée. Ceci prouve le lemme. □

2. Résolution de l'équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) \;=\; f(t,x)$$

où f est une fonction numérique interne définie sur le produit $T \times X$ de deux quasi-intervalles.

Sous les hypothèses classiques (f continue, lipschitzienne en x), on va démonter l'existence et l'unicité, à des infinitésimaux près, de solutions globales satisfaisant à une condition initiale donnée (théorème 5). Il découlera de l'énoncé même du théorème que la solution est continue par rapport à la condition initiale et que, si l'on suppose en plus que la fonction f dépend continûment de paramètres, la solution dépend elle aussi continûment de ces paramètres.

Définitions

(a) On dira que la fonction f est continue sur $T \times X$ si pour t et s dans T infiniment proches et x et y dans X infiniment proches, on a $f(t,x) \simeq f(s,y)$.

(b) On dira que f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable s'il existe une constante k limitée telle que, pour t dans T, x et y dans X, on ait

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant k|x-y|.$$

Théorème 5. *Soient T un quasi-intervalle d'extrémités limitées t_0 et t_ν et X un quasi-intervalle d'extrémités illimitées $a < 0, b > 0$, tels que pour t dans T et x dans X, le rapport $d_X x / d_T t$ soit infinitésimal.*

Soit f une fonction numérique interne définie sur $T \times X$. On suppose qu'elle prend des valeurs limitées en tout point de coordonnées limitées et qu'elle est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

(a) *Pour tout $x_0 \in X$ limité, il existe une fonction interne x continue, définie sur T, solution de l'équation différentielle*

$$x'(t) \ \simeq \ f(t, x(t)) \tag{1}$$

et qui vérifie la condition initiale

$$x(t_0) \ \simeq \ x_0. \tag{2}$$

(b) *Si on suppose de plus la fonction f continue, la solution x est une fonction différentiable sur T.*

(c) *Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation (1) qui vérifient la condition initiale (2), alors on a $x_1(t) \simeq x_2(t)$ pour tout t dans T.*

Preuve. — On définit une rétraction de la droite numérique $\mathbb{R}$ sur le quasi-intervalle X comme suit :

$$\rho(u) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant u < x + d_X x \text{ avec } x \in X \\ a & \text{si } x < a \\ b & \text{si } x \geqslant b. \end{cases}$$

Remarques : (i) ρ prend ses valeurs dans X ; (ii) $\rho(x) = x$ pour tout $x \in X$; (iii) $\rho(u) \simeq u$ pour tout u limité.

(a) Soit x la fonction interne définie par la formule de récurrence

$$\begin{cases} x(t_0) & = \ \rho(x_0) \ = \ x_0 \\ x(t + d_T t) & = \ \rho\big[x(t) + f(t, x(t)).d_T t\big]. \end{cases}$$

Nous écrirons désormais dt pour $d_T t$. Enumérons les éléments de T sous la forme $t_0 < t_1 < \cdots < t_\nu$. L'équation précédente s'explicite comme suit :

$$\begin{cases} x(t_0) & = & \rho(x_0) \\ x(t_{i+1}) & = & \rho\big[x(t_i) + f(t_i, x(t_i)).(t_{i+1} - t_i)\big] \end{cases}$$

où i prend les valeurs $0, 1, \ldots, \nu - 1$.

Montrons d'abord que $x(t)$ est limité, quel que soit t dans T. Désignons par α le plus grand des nombres $d_X x/dt$, x décrivant $X^- = X \setminus \{b\}$ et t décrivant $T^- = T \setminus \{t_\nu\}$. Par hypothèse, α est infinitésimal. Si

$$a \leqslant x(t) + f(t, x(t)).dt \leqslant b,$$

alors, d'après la définition de ρ, on a :

$$0 \leqslant x(t) + f(t, x(t)).dt - \rho[x(t) + f(t, x(t))dt] < \alpha dt,$$

d'où

$$|x'(t)| \leqslant |f(t, x(t))| + \alpha.$$

Si $x(t) + f(t, x(t)).dt$ est plus petit que a ou plus grand que b, alors $x(t+dt)$ est égal à a ou b, et dans les deux cas, on a

$$|x'(t)| \leqslant |f(t, x(t))|.$$

La fonction x vérifie donc l'inéquation

$$|x'(t)| \leqslant |f(t, x(t))| + \alpha.$$

Soit k une constante limitée non infinitésimale telle que pour tous t dans T, x et y dans X, on ait :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k|x - y|,$$

et soit $m = \mathrm{Max}\{|f(t, x_0)| : t \in T\}$. Le nombre m est limité et l'on a :

$$|f(t, x(t))| \leqslant |f(t, x_0)| + k|x(t)| + k|x_0|,$$

d'où, en notant M le nombre limité $k|x_0| + m + \alpha$, l'inégalité

$$|x'(t)| \leqslant k|x(t)| + M.$$

La fonction v définie sur T par $v(t) = |x(t)| + M/k$ vérifie alors les hypothèses de la proposition 3. Elle prend donc des valeurs limitées en tout point de T et par conséquent la fonction x est aussi à valeurs limitées.

Pour tout $t \in T$, on a $x(t) \in [a,b]$ et l'on a, par construction :

$$|x(t+dt) - x(t) - f(t,x(t))dt| \leqslant \alpha\, dt.$$

Donc x est une solution de (1), et elle est continue sur T puisque sa dérivée le long de T est limitée (proposition 1).

(b) Si f est continue sur $T \times X$, la fonction $t \to f(t,x(t))$ est continue sur T, donc la dérivée x' de x le long de T est continue, donc x est différentiable sur T d'après la proposition 2.

(c) Notons ε_1 et ε_2 les fonctions internes définies sur T par :

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f(t,x_1(t)) + \varepsilon_1(t) \\ x_2'(t) & = & f(t,x_2(t)) + \varepsilon_2(t) \end{array}$$

et ε le nombre infinitésimal $\varepsilon = \mathrm{Max}\{|\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t)| : t \in T\}$. La fonction $u = x_1 - x_2$ vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(t_0) \simeq 0 \\ |u'(t)| \leqslant k|u(t)| + \varepsilon, \end{cases}$$

et on en déduit, comme en (a) (en utilisant la proposition 3), que $u(t)$ est infinitésimal pour tout t dans T. □

Stabilité des solutions de l'équation $x' = f(t,x)$

Revenons au point de vue de l'expérimentateur. Il s'agit pour lui de résoudre l'équation différentielle

$$x' = f(t,x)$$

où f est une fonction définie sur le produit de deux intervalles de la droite réelle $[\alpha,\beta] \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Pour cela il discrétise $[\alpha,\beta]$ et $\mathbb{R}$ et remplace l'équation différentielle par une équation de récurrence. La méthode ne sera acceptable que si la solution obtenue ne dépend pas (à des infinitésimaux près) de la discrétisation choisie. Il en est ainsi lorsque la fonction f possède les propriétés requises au théorème 5. Plus précisément on a le résultat suivant :

Théorème 6. *On suppose que les hypothèses du théorème 5 sont vérifiées et que la fonction f est continue.*

Soit S un quasi-intervalle ayant mêmes extrémités que T, contenu dans T, et soit $y : S \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation

$$\begin{cases} y'(s) \simeq f(s, y(s)) \\ y(t_0) \simeq x_0 \end{cases} \tag{3}$$

définie le long de S. Soit x une solution de l'équation (1) définie le long de T et telle que $x(t_0) \simeq x_0$. On a alors $x(s) \simeq y(s)$ pour tout $s \in S$.

Preuve. — La fonction x est différentiable sur T, sa restriction à S est solution de l'équation (3), donc on a $x(s) \simeq y(s)$ d'après l'unicité de la solution démontrée au théorème 5 (c). □

3. Fonctions élémentaires

On va définir les fonctions exponentielle, sinus, cosinus, le long d'un quasi-intervalle. Le théorème de stabilité démontré antérieurement assure que ces définitions ne dépendent pas, à des infinitésimaux près, du quasi-intervalle choisi.

3.1. Fonction exponentielle.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, l'équation différentielle $x' = x$ admet, sur tout quasi-intervalle T à extrémités limitées et contenant 0, une solution et une seule (à des infinitésimaux près) vérifiant $x(0) = 1$. On la note exp_T .

Si S est un autre quasi-intervalle contenu dans T, on a $exp_S(s) \simeq exp_T(s)$ pour tout $s \in S$. Pour tout nombre limité t, on définira $exp\,t$, à un infinitésimal près, comme l'un quelconque des nombres $exp_T t$. Par exemple, pour $t \geqslant 0$, on écrira $t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\nu$, où ε_i est positif et infinitésimal. La solution de l'équation de récurrence

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dfrac{1}{\varepsilon_i}\Big[x(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i) - x(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1})\Big] = x(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{i-1}) \end{cases}$$

est donnée par la formule

$$x(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i) = \prod_{j=1}^{i}(1 + \varepsilon_j).$$

On aura donc : $exp\,t \simeq \displaystyle\prod_{i=1}^{\nu}(1 + \varepsilon_i)$.

On obtient immédiatement quelques propriétés simples de l'exponentielle :

$$exp(s + t) \simeq exp\,s \cdot exp\,t.$$

Si ν est un entier illimité, on a aussi les formules

$$exp\,t \simeq \Big(1 + \frac{t}{\nu}\Big)^{\nu} \simeq \sum_{n=0}^{\nu} \frac{t^n}{n!}.$$

3.2. Fonctions sinus et cosinus

On peut généraliser les résultats du paragraphe 2 aux équations différentielles vectorielles :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \xi(t, \mathbf{u})$$

où $\mathbf{u}$ est un élément de $\mathbb{R}^2$, ξ une fonction numérique interne définie sur le produit $T \times P$ d'un quasi-intervalle et d'un grillage hyperfini de $\mathbb{R}^2$ (par exemple $P = \Big\{\Big(\dfrac{n}{\nu}, \dfrac{p}{\nu}\Big) \ : \ n, p \text{ entiers}, |n| \leqslant \nu^2, |p| \leqslant \nu^2\Big\}$, où ν est un entier illimité positif).

On définira ainsi les fonctions sinus et cosinus comme composantes de la solution de l'équation

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \xi(\mathbf{u}) \quad \text{avec } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \xi\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

qui satisfait à la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\, sin\, t &= cos\, t, \qquad sin(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}\, cos\, t &= -\, sin\, t, \quad cos(0) = 1. \end{aligned}$$

On peut introduire comme d'habitude l'exponentielle complexe par

$$exp(x + iy) = exp\, x.(cos\, y + i\, sin\, y)$$

pour x, y dans $\mathbb{R}$. Les propriétés de l'exponentielle réelle mentionnées ci-dessus se généralisent. Par exemple, si $z = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\nu$ avec des ε_i infinitésimaux (complexes) tels que $|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_\nu|$ soit limité, on a

$$exp\, z \simeq \prod_{i=1}^{\nu} (1 + \varepsilon_i).$$

Références

[1] P. Cartier et Y. Feneyrol-Perrin. Méthodes infinitésimales appliquées au calcul des Probabilités. Cours de l'Ecole d'été de Saint-Flour, 1985.

[2] E. Nelson. Internal Set Theory : A new approach to nonstandard analysis. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 83, pp. 1165–1198, 1977.

Université Blaise Pascal
Laboratoire de Mathématiques Pures
63177 Aubière CEDEX
France
e-mail: perrin@ucfma.univ-bpclermont.fr