Cahiers du Centre de logique
Volume 9

Intégration et analyse non standard

par

J. Mawhin
Université catholique de Louvain

1. La théorie des ensembles internes de Nelson

La version, due à Nelson [13], de l'*analyse non standard* [16], consiste à rajouter au prédicat binaire $\in$ et aux axiomes de Zermelo–Fraenkel de la théorie des ensembles (ZFC), base des mathématiques classiques, un prédicat unaire *standard*, noté "st", et trois axiomes supplémentaires régissant son mode d'emploi : l'axiome de *transfert* (T), l'axiome d'*idéalisation* (I) et l'axiome de *standardisation* (S) ([13, 5, 6]). On obtient ainsi la *théorie des ensembles internes* (IST).

Par rapport à ZFC (dans laquelle, rappellons-le, tous les objets mathématiques sont des ensembles), la nouvelle théorie permet une distinction nouvelle entre *ensembles standard* et *ensembles non standard.* Comme c'est le cas pour ZFC, les formules de la théorie IST sont écrites, à partir des symboles de la logique formelle et des prédicats $\in$ et "st", en respectant les règles syntaxiques usuelles, et des *constantes* (comme $\varnothing$ pour l'ensemble vide, $\mathbb{N}$ pour l'ensemble des naturels, ...) sont introduites pour remplacer de longues formules définissant univoquement des ensembles souvent utilisés. De telles constantes seront appelées *standard* si leur définition n'implique pas le prédicat "st" et *non standard* sinon. Bien entendu, toutes les constantes de la mathématique classique (ZFC) sont standard (en particulier, $5, 32.000, \pi, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ sont standard). Une formule sera dite *interne* si elle peut s'écrire sans utiliser le mot standard ni aucun de ses dérivés. Une formule interne sera dite *standard* si toutes les constantes de cette formule sont standard. On utilisera les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall^{\mathrm{st}} x\, F(x) &\iff \forall x\, [\mathrm{st}(x) \Rightarrow F(x)],\\
\exists^{\mathrm{st}} x\, F(x) &\iff \exists x\, [\mathrm{st}(x) \Rightarrow F(x)],\\
\forall^{\mathrm{st\ fini}} x\, F(x) &\iff \forall x\, [\mathrm{st}(x) \text{ et } x \text{ fini} \Rightarrow F(x)],\\
\exists^{\mathrm{st\ fini}} x\, F(x) &\iff \exists x [\mathrm{st}(x) \text{ et } x \text{ fini} \Rightarrow F(x)].
\end{aligned}$$

L'*axiome de transfert* affirme que pour toute formule standard

$$S(x, t_1, \ldots, t_n)$$

n'ayant pas d'autres variables libres que $x, t_1, \ldots, t_n$, on a l'énoncé suivant :

$$\forall^{\mathrm{st}} t_1, t_2, \ldots, t_n \left[\forall^{\mathrm{st}} x\, S(x, t_1, \ldots, t_n) \;\Rightarrow\; \forall x\, S(x, t_1, \ldots, t_n)\right],$$

ou encore l'énoncé équivalent

$$\forall^{\mathrm{st}} t_1, t_2, \ldots, t_n \left[\exists x\, S(x, t_1, \ldots, t_n) \;\Rightarrow\; \exists^{\mathrm{st}} x\, S(x, t_1, \ldots, t_n)\right].$$

L'*axiome d'idéalisation* affirme que pour toute formule interne I, contenant au moins deux variables libres x et y, on a l'énoncé suivant :

$$\forall^{\mathrm{st\ fini}} z \left[\exists x\, \forall y \in z\; I(x, y) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, \forall^{\mathrm{st}} y\; I(x, y)\right].$$

L'axiome d'idéalisation entraîne que *tout ensemble infini contient nécessairement un élément non standard.* C'est donc le cas de $\mathbb{N}$, dont les éléments non standard sont caractérisés par le fait qu'ils majorent tous les éléments standard de $\mathbb{N}$. On les appelle des entiers *infiniment grands* ou *idéalement grands.* L'inverse d'un infiniment grand de $\mathbb{N}$ est majoré par les inverses de tous les entiers standard non nuls. C'est un exemple d'*infiniment petit* ou *idéalement petit,* que l'on définit en toute généralité, dans $\mathbb{R}$, comme un élément majoré, en valeur absolue, par tous les réels standard strictement positifs. Si x et y sont deux réels tels que $x - y$ soit un infiniment petit, on écrit $x \simeq y$.

L'*axiome de standardisation* affirme que pour toute formule $F(z)$ (interne ou externe), on a :

$$\forall^{\mathrm{st}} x\ \exists^{\mathrm{st}} y\ \forall^{\mathrm{st}} z\ [z \in y \iff z \in x \text{ et } F(z)].$$

2. Intégrale de Darboux-Peano ou DP-intégrale

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On appellera *partition* de I toute famille finie $([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de sous-intervalles compacts de I tels que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b.$$

On désigne par $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des partitions de I.

Soit f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $P \in \mathcal{P}(I)$, on pose

$$\Delta(f, P) \ = \ \sum_{j=1}^{m} \Big(\sup_{[a_{j-1}, a_j]} f \ - \inf_{[a_{j-1}, a_j]} f \Big)(a_j - a_{j-1}). \tag{1}$$

On doit à Darboux [4] et Peano [14] la définition suivante d'intégrabilité d'une application bornée f de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *intégrable au sens de Darboux-Peano* ou *DP-intégrable* sur I si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P = ([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{P}(I)) \ \ \Delta(f, P) \leqslant \epsilon.$$

La définition de Darboux-Peano est équivalente à l'égalité suivante

$$\overline{\int_I} f \ = \underline{\int_I} f, \tag{2}$$

où

$$\overline{\int_I} f \ = \inf_{([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{P}(I)} \Big[\sum_{j=1}^{m} (\sup_{[a_{j-1}, a_j]} f)(a_j - a_{j-1}) \Big],$$

$$\underline{\int_I} f \ = \sup_{([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{P}(I)} \Big[\sum_{j=1}^{m} (\inf_{[a_{j-1}, a_j]} f)(a_j - a_{j-1}) \Big],$$

auquel cas, la valeur commune des deux expressions est notée $\int_I f$, ou $\int_I f(x)\,dx$, ou $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)\,dx$. La définition de Darboux-Peano est également équivalente à l'égalité

$$\inf_{\psi \in \mathcal{E}(I), f \leqslant \psi} \int_I \psi \;=\; \sup_{\varphi \in \mathcal{E}(I), \varphi \leqslant f} \int_I \varphi, \tag{3}$$

où $\mathcal{E}(I)$ désigne l'ensemble des *applications en escalier sur* I, c'est-à-dire des applications constantes sur l'intérieur de chaque intervalle d'une certaine partition de I. Pour deux applications g et h de I dans $\mathbb{R}$, on écrit $g \leqslant h$ si $g(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \in I$. Si $P = ([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m}$ est une telle partition et c_j la valeur de f sur $]a_{j-1}, a_j[$, alors, par définition,

$$\int_I \varphi \;=\; \sum_{j=1}^{m} c_j(a_j - a_{j-1}).$$

La valeur commune des deux expressions dans (3) est égale à $\int_I f$. L'égalité (3) est à son tour équivalente à la relation

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \varphi \in \mathcal{E}(I))(\exists \psi \in \mathcal{E}(I)) \quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \text{ et } \int_I (\psi - \varphi) < \epsilon. \tag{4}$$

Ces notions et ces résultats se trouvent dans de nombreux ouvrages d'analyse ou de calcul intégral.

3. Caractérisation non standard de la DP-intégrale

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact standard de $\mathbb{R}$.

$P = ([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{P}(I)$ sera dite *infinitésimale* si, pour chaque $1 \leqslant j \leqslant m$, on a $a_j \simeq a_{j-1}$. Cela entraîne évidemment que m soit infiniment grand. Un exemple de partition infinitésimale de $[a, b]$ est donné par

$$\left(\left[a + \frac{j-1}{m}(b-a)\,,\, a + \frac{j}{m}(b-a)\right]\right)_{1 \leqslant j \leqslant m},$$

pour n'importe quel entier infiniment grand m.

En utilisant l'axiome de transfert, il n'est pas difficile de démontrer [6] que

> *si f est une application standard et bornée de I dans $\mathbb{R}$, il y a équivalence entre les propositions suivantes :*
>
> (a) *f est DP-intégrable sur I.*
>
> (b) *Pour tout $P \in \mathcal{P}(I)$ infinitésimal, on a $\Delta(f, P) \simeq 0$.*
>
> (c) *Il existe un $P \in \mathcal{P}(I)$ tel que $\Delta(f, P) \simeq 0$,*
>
> *où la quantité $\Delta(f, P)$ est définie en (1).*

On en déduit aisément une proposition équivalente aux précédentes :

$$(\exists \varphi \in \mathcal{E}(I))(\exists \psi \in \mathcal{E}(I)) \quad \varphi \leqslant f \leqslant \psi \ \text{ et } \int_I (\psi - \varphi) \simeq 0. \tag{5}$$

En vertu de l'axiome de transfert, cette proposition est encore équivalente à la suivante :

$$\begin{gathered}(\forall^{\mathrm{st}} \epsilon > 0)(\exists^{\mathrm{st}} \varphi \in \mathcal{E}(I))(\exists^{\mathrm{st}} \psi \in \mathcal{E}(I))(\forall x \in I) \\ \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \ \text{ et } \int_I (\psi - \varphi) < \epsilon.\end{gathered} \tag{6}$$

4. L'intégrale de Lebesgue ou L-intégrale

Si l'on dispose de la *mesure de Lebesgue* sur les parties de $\mathbb{R}$, on peut définir, suivant H. Lebesgue [9], une intégrale plus générale que celle de Darboux-Peano sur un intervalle compact I de $\mathbb{R}$. Appelons *fonction simple* sur I toute application de I dans $\mathbb{R}$ de la forme $\sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}$ où les c_j sont des nombres réels, χ_B désigne la fonction caractéristique de l'ensemble B et la famille $(A_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ constitue une partition (ensembliste) de I en parties mesurables au sens de Lebesgue. L'*intégrale de Lebesgue* ou la *L-intégrale* de s sur I sera par définition le réel

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j),$$

où $\mu(B)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble B.

On désignera par $\mathcal{S}(I)$ l'ensemble des fonctions simples sur I.

Soit f une fonction bornée sur I. On dira que f est *intégrable au sens de Lebesgue* ou *L-intégrable* sur I si on a l'égalité

$$\inf_{\psi \in \mathcal{S}(I), f \leqslant \psi} \int_I \psi \;=\; \sup_{\varphi \in \mathcal{S}(I), \varphi \leqslant f} \int_I \varphi. \tag{7}$$

L'égalité (7) est à son tour équivalente à la relation

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \varphi \in \mathcal{S}(I))(\exists \psi \in \mathcal{S}(I)) \;\; \varphi \leqslant f \leqslant \psi \;\text{ et }\; \int_I (\psi - \varphi) < \epsilon. \tag{8}$$

On montre aisément que

toute fonction DP-intégrable sur I est L-intégrable sur I,

avec la même intégrale, et l'exemple de la fonction caractéristique des rationnels montre que la réciproque est fausse.

On notera que si la définition de l'intégrale de Darboux-Peano ne repose que sur la mesure des intervalles, celle de Lebesgue requiert la théorie de la mesure des parties de $\mathbb{R}$.

On trouvera ces notions et ces résultats, ainsi que l'extension de la L-intégrale aux fonctions non bornées, dans les ouvrages d'analyse ou de calcul intégral.

5. Caractérisation non standard de la L-intégrale

On doit à Loos [10] une caractérisation non standard de la L-intégrabilité qui rappelle formellement (6) et ne repose pas sur une étude préalable de la mesure de Lebesgue des parties de $\mathbb{R}$.

On démontre dans la théorie des ensembles internes, en utilisant la compacité locale de $\mathbb{R}$, que,

pour tout $x \in \mathbb{R}$ limité (c'est-à-dire majoré en valeur absolue par un réel standard), il existe un et un seul réel standard, noté ${}^0x$, tel que $x \simeq {}^0x$.

Le résultat de Loos est le suivant :

une application standard bornée $f : I \to \mathbb{R}$ est L-intégrable sur I si et seulement si

$$(\forall^{\text{st}}\epsilon > 0)(\exists\varphi \in \mathcal{E}(I))(\exists\psi \in \mathcal{E}(I))(\forall x \in I)$$
$$\varphi(x) \leqslant f({}^0x) \leqslant \psi(x) \;\; et \;\; \int_I (\psi - \varphi) < \epsilon. \tag{9}$$

On pourra trouver la démonstration de ce résultat dans [10] et dans [6]. Par analogie avec la DP-intégrale, on pourraît être tenté de remplacer cette caractérisation par la formulation plus simple

$$(\exists\varphi \in \mathcal{E}(I))(\exists\psi \in \mathcal{E}(I))(\forall x \in I)$$
$$\varphi(x) \leqslant f({}^0x) \leqslant \psi(x) \;\; \text{et} \;\; \int_I (\psi - \varphi) \simeq 0. \tag{10}$$

Blais [1] a montré que (10) caractérise les fonctions *constantes* sur I !

6. L'intégrale de Riemann ou R-intégrale

La définition originale de Riemann [15] diffère de celle de Darboux et Peano et repose sur une notion de limite de sommes.

Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On appellera *partition pointée* ou *P-partition* de I toute famille finie

$$\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$$

telle que $([a_{j-1}, a_j])_{1 \leqslant j \leqslant m}$ soit une partition de I et $x_j \in [a_{j-1}, a_j]$, $(1 \leqslant j \leqslant m)$.

On désigne par $\mathcal{PP}(I)$ l'ensemble des P-partitions de I.

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. La définition de Riemann pour l'intégrabilité de f sur $[a, b]$ est la suivante : on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* ou *R-intégrable* sur I s'il existe un réel J tel que la condition suivante soit satisfaite :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{PP}(I))$$
$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} (a_j - a_{j-1}) \leqslant \delta \;\Rightarrow\; \Big|\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - J\Big| \leqslant \epsilon.$$

On montre que

> *toute fonction R-intégrable sur I est bornée sur I, et que f est R-intégrable sur I si et seulement si f est DP-intégrable sur I, la valeur de l'intégrale étant la même, et égale à J.*

7. Caractérisation non standard de la R-intégrale

Une P-partition $((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de $[a, b]$ sera appelée *infinitésimale* si chaque $a^j - a^{j-1}$ est infiniment petit. Si $a < b$ sont des réels standard, ce que nous supposerons, une P-partition infinitésimale est donc formée d'un nombre infiniment grand de sous-intervalles. Un exemple est donné par la P-partition

$$\left(\left(a + (j-1)\frac{b-a}{m}, \left[a + (j-1)\frac{b-a}{m}, a + j\frac{b-a}{m}\right]\right)\right)_{1 \leqslant j \leqslant m},$$

avec m infiniment grand.

Soit f une application standard de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Il résulte aisément de l'axiome de transfert que

> *f est R-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe un réel standard J tel que*
> $$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \;\simeq\; J$$
> *pour toute P-partition infinitésimale Π de $[a, b]$.*

On en déduit aussitôt la caractérisation de Cauchy correspondante :

f est R-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - \sum_{k=1}^{m'} f(x'_k)(a'_k - a'_{k-1}) \simeq 0$$

pour toutes les P-partitions infinitésimales Π et Π' de $[a,b]$.

Si l'on pose

$$I_{jk} = [a_{j-1}, a_j] \cap [a_{k-1}, a_k],$$

et

$$P_{\Pi,\Pi'} = \big\{(j,k) \ : \ 1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant m' \text{ et } I_{jk} \neq \varnothing\big\},$$

et si $l(I_{jk})$ désigne la longueur de I_{jk}, pour les $(j,k) \in P_{\Pi,\Pi'}$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - \sum_{k=1}^{m'} f(x'_k)(a'_k - a'_{k-1}) \\ = \sum_{(j,k)\in P_{\Pi,\Pi'}} [f(x_j) - f(x'_k)]l(I_{jk}). \end{aligned} \tag{11}$$

On sait que f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si elle y est uniformément continue et la caractérisation non standard de la continuité uniforme s'exprime par $f(x) \simeq f(x')$ pour $x \simeq x'$ dans $[a,b]$ (voir [6]). Dès lors, pour tout $(j,k) \in P_{\Pi,\Pi'}$ si l'on choisit un $y_{jk} \in I_{jk}$, alors

$$f(x_j) - f(x'_k) \ = \ f(x_j) - f(y_{jk}) + f(y_{jk}) - f(x'_k) \ \simeq \ 0,$$

et donc

$$\Delta \ = \max_{(j,k)\in P_{\Pi,\Pi'}} |f(x_j) - f(x'_k)| \ \simeq \ 0.$$

En conséquence, il résulte de (11) que

$$\left|\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - \sum_{k=1}^{m'} f(x'_k)(a'_k - a'_{k-1})\right| \ \leqslant \ \Delta(b-a) \ \simeq \ 0,$$

et

toute fonction standard continue sur $[a,b]$ *y est R-intégrable.*

L'axiome de transfert entraîne le résultat pour toute fonction continue sur $[a,b]$.

8. Intégrale de Kurzweil-Henstock ou KH-intégrale

Si $\delta > 0$, appelons *δ-fine* toute P-partition $((x_j,[a_{j-1},a_j]))_{1\leqslant j\leqslant m}$ telle que

$$x_j - \delta \leqslant a_{j-1} < a_j \leqslant x_j + \delta \qquad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

La formulation suivante équivalente de la R-intégrabilité est postérieure d'une centaine d'années au mémoire de Riemann :

f est R-intégrable sur I si et seulement s'il existe un réel J tel que la condition suivante soit satisfaite :

$$\begin{gathered}(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\Pi = ((x_j,[a_{j-1},a_j]))_{1\leqslant j\leqslant m} \in \mathcal{PP}(I))) \\ \Pi \text{ est } \delta\text{-fine } \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - J\right| \leqslant \epsilon.\end{gathered} \tag{12}$$

Cette caractérisation se prête à une généralisation de l'intégrale de Lebesgue, découverte indépendamment, aux alentours de 1960, par Kurzweil [8] et Henstock [7].

Si $\delta : [a,b] \to]0,+\infty[$ est une application strictement positive quelconque (en abrégé une *jauge* sur $[a,b]$), appelons *δ-fine* toute P-partition

$$((x_j,[a_{j-1},a_j]))_{1\leqslant j\leqslant m}$$

telle que

$$x_j - \delta(x_j) \leqslant a_{j-1} < a_j \leqslant x_j + \delta(x_j) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m).$$

La notion introduite dans le cadre de la R-intégrale correspond au choix d'une jauge *constante* δ, et les P-partitions δ-fines peuvent être explicitement construites. Ce n'est plus le cas pour les P-partitions δ-fines pour une jauge quelconque δ, dont l'existence constitue une propriété équivalente au lemme de Borel-Lebesgue [2, 9], énoncée et démontrée dès 1895 par Cousin [3], dans sa thèse sur les fonctions de plusieurs variables complexes.

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est *intégrable au sens de Kurzweil-Henstock* ou *KH-intégrable* sur I si la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{gathered}\big(\forall\epsilon > 0\big)\big(\exists\delta : I \to]0, +\infty[\big)\big(\forall\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1\leqslant j\leqslant m} \in \mathcal{PP}(I)\big) \\ \Pi \text{ est } \delta\text{-fine} \;\Rightarrow\; \Big|\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - J\Big| \leqslant \epsilon.\end{gathered} \tag{13}$$

Il est clair que

toute fonction R-intégrable sur I est KH-intégrable sur I

avec la même intégrale. On peut donc conserver la notation habituelle de l'intégrale. La relation entre la définition (13) et l'intégrale de Lebesgue est plus délicate à établir. En fait, on peut montrer la KH-intégrale est équivalente à l'*intégrale de Denjoy-Perron* [17], et que

f est L-intégrable sur I si et seulement si f et $|f|$ sont KH-intégrables sur I.

On remarquera que la définition (13) ne fait intervenir que la mesure des intervalles de $\mathbb{R}$. Pour plus de détails sur cette approche de l'intégrale, on pourra consulter [12].

9. Caractérisation non standard de la KH-intégrale

On peut chercher à caractériser, dans le langage de l'analyse non standard, l'intégrale de Kurzweil–Henstock.

Appelons *microjauge* sur $[a, b]$ toute jauge μ sur $[a, b]$ majorée, sur cet intervalle, par toutes les jauges *standard*. L'existence de telles microjauges est assurée par l'axiome d'idéalisation et il est facile de montrer que les valeurs d'une microjauge sont toujours infiniment petites. Mais une jauge constante infiniment petite (de valeur ϵ) n'est pas une microjauge, puisqu'elle n'est pas majorée par la jauge standard δ définie par $\delta(a) = 1$ et $\delta(x) = x - a$ si $x > a$. (Considérer par exemple $x = a + \epsilon/2$.)

Une P-partition de $[a, b]$ qui est μ-fine pour une microjauge μ est appellée une *micropartition* de $[a, b]$. Toute micropartition de $[a, b]$ est donc infinitésimale, mais la réciproque est fausse. Il est facile de vérifier que si $c \in [a, b]$ et si Π est une P-partition δ-fine pour une jauge δ telle que $\delta(x) \leqslant |x - c|/2$ pour $x \neq c$, alors c est nécessairement l'un des x_j de toute P-partition δ-fine $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$. Comme la jauge δ définie par $\delta(x) = |x - c|/2$ si $x \neq c$ et $\delta(c) = 1$ est standard lorsque c est standard, il résulte aussitôt de la définition d'une micropartition $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de $[a, b]$ que

> *tout élément standard de $[a, b]$ se retrouve parmi les x_j de la micropartition.*

On peut montrer [11], en utilisant l'axiome de transfert, que

> *f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock sur $[a, b]$ si et seulement s'il existe un réel standard J tel que*
>
> $$\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \simeq J$$
>
> *pour toute micropartition $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$ de $[a, b]$.*

Soit maintenant $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction *primitivable* sur $]a, b[$ et F une primitive de f sur $]a, b[$. Supposons en outre que

$$F(a+) \;=\; \lim_{x \to a, x > a} F(x) \quad \text{et} \quad F(b-) \;=\; \lim_{x \to b, x < b} F(x)$$

existent. On va prouver par l'analyse non standard le *théorème fondamental du calcul différentiel et intégral pour la KH-intégrale,* à savoir

> *f est KH-intégrable sur $[a, b]$ et*
>
> $$\int_a^b f \;=\; F(b-) - F(a+).$$

Par l'axiome de transfert, il suffit de le prouver pour f et $[a,b]$ standard, auquel cas F l'est aussi.

On montre aisément, toujours par transfert, que

F a pour dérivée f sur $]a,b[$ si et seulement si pour toute microjauge μ sur $]a,b[$, tout $x \in]a,b[$, et tout $y \in]a,b[\cap [x-\mu(x), x+\mu(x)] \setminus \{x\}$, on a

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} \simeq f(x). \tag{14}$$

Soit $\Pi = ((x_j, [a_{j-1}, a_j]))_{1 \leqslant j \leqslant m}$ une micropartition de $[a,b]$. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - [F(b-) - F(a+)] \\ = \; & f(a)(a_1 - a) + f(b)(b - a_{m-1}) \\ & + [F(a_{m-1}) - F(b-)] + [F(a+) - F(a_1)] \\ & + \sum_{j=2}^{m-1} (a_j - a_{j-1}) \Big[f(x_j) - \frac{F(a_j) - F(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}} \Big]. \end{aligned} \tag{15}$$

Comme a et b sont standard, les deux premiers termes du second membre de (15) sont infiniment petits et, nécessairement $a = x_1$ et $b = x_m$, ce qui entraîne, par la caractérisation non standard de la limite ([6]), que les troisième et quatrième termes de ce second membre sont infiniment petits. En outre, en utilisant (14), on a, pour $2 \leqslant j \leqslant m-1$,

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= \frac{F(a_j) - F(a_{j-1})}{a_j - a_{j-1}} - f(x_j) \\ &= \frac{a_j - x_j}{a_j - a_{j-1}} \left[\frac{F(a_j) - F(x_j)}{a_j - x_j} - f(x_j) \right] \\ &\quad + \frac{x_j - a_{j-1}}{a_j - a_{j-1}} \left[\frac{F(a_{j-1}) - F(x_j)}{a_{j-1} - x_j} - f(x_j) \right], \end{aligned}$$

et donc, par (14), chaque ϵ_j est un infiniment petit comme combinaison convexe de deux infiniment petits. Comme $b-a$ est standard, on en déduit aisément que le cinquième terme de (15) est un infiniment petit, et la démonstration est complète. On notera que ce résultat est faux pour la L-intégrale.

On pourra consulter [11] pour plus de détails et pour différentes extensions.

Références

[1] F. Blais. L'intégrale de Loos. *Univ. Paris 7, Séminaire Non Standard*, Vol. 87/1, 1987.

[2] E. Borel. Sur quelques points de la théorie des fonctions. *Ann. Ecole Norm. Sup.*, Vol. 3, no. 12, pp. 9–55, 1895.

[3] P. Cousin. Sur les fonctions de n variables complexes. *Acta Math.*, Vol. 19, pp. 1–61, 1895.

[4] G. Darboux. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Ann. Ecole Norm. Sup.*, Vol. 4, pp. 57–112, 1875.

[5] A. Deledicq et M. Diener. *Leçons de calcul infinitésimal.* ACL - Armand Colin, Paris, 1989.

[6] F. Diener et G. Reeb. *Analyse non standard.* Hermann, Paris, 1989.

[7] R. Henstock. Definitions of Riemann type of the variational integrals. *Proceed. London Math. Soc.*, Vol. 3, no. 11, pp. 402–418, 1961.

[8] J. Kurzweil. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Math. J.*, Vol. 7, no. 82, pp. 418–446, 1957.

[9] H. Lebesgue. *Leçons sur l'intégration et la recherche des primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[10] O. Loos. A non-standard approach to the Lebesgue integral. In Diener et Wellet, éditeurs, *Mathématiques finitaires et analyse non standard, tome 1*, pp. 27–35. Univ. Paris VII, 1989.

[11] J. Mawhin. Nonstandard analysis and generalized Riemann integrals. *Casopis pro pestovani mat.*, Vol. 111, pp. 34–47, 1986.

[12] J. Mawhin. *Analyse. Fondements, techniques, évolution.* De Boeck-Université, Bruxelles, 1992.

[13] E. Nelson. Internal set theory : A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 83, pp. 1165–1198, 1977.

[14] G. Peano. Sull'integrabilità delle funzioni. *Atti Accad. Sci. Torino*, Vol. 18, pp. 439–446, 1883.

[15] B. Riemann. Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. In *Oeuvres mathématiques de Riemann*, pp. 225–272, Paris, 1968. Blanchard.

[16] A. Robinson. *Non-Standard Analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1966.

[17] S. Saks. *Theory of the Integral.* Monografie Matematyczne, Varsovie, 1937.

Université catholique de Louvain
Département de mathématique
Chemin du cyclotron 2
1348 Louvain-la-Neuve
Belgique
e-mail : `mawhin@amm.ucl.ac.be`