Cahiers du Centre de logique
Volume 9

# Y a-t-il vraiment autant de nombres pairs que de naturels ?

par

T. Gilbert et N. Rouche
*Université catholique de Louvain*

Les naturels finis sont des cardinaux d'ensembles et peuvent s'obtenir par comptage. Par contre, les hypernaturels de l'analyse non standard sont habituellement définis à partir de suites de naturels et ne renvoient de prime abord à aucun ensemble ; ils ne sont donc pas des résultats de comptage. On aimerait pourtant qu'ils expriment aussi les "nombres" d'éléments de certains ensembles, qui bien entendu seraient infinis. Dans un article récent [1], V. Benci propose d' "étiqueter" les ensembles dénombrables de manière à pouvoir en "compter" les éléments et introduire ainsi une certaine classe de nombres hypernaturels.

Mais que veut dire "étiqueter" ? On considère une suite infinie de boîtes étiquetées $0, 1, 2, 3, \ldots$ Si on veut, par exemple, "étiqueter" l'ensemble des carrés des naturels, on aura tendance à placer 0 dans la boîte étiquetée 0, puis 1 dans la boîte étiquetée 1, puis 4 dans la boîte étiquetée 4, etc. On pourra ensuite compter les éléments qui se trouvent dans toutes les boîtes jusqu'à la $n^{\mathrm{e}}$. On trouve $1 + \mathrm{ent}\sqrt{n}$, où "ent" veut dire "la partie entière de".

Comparée à la suite des naturels, la suite des comptes des carrés jusqu'à l'étiquette $n$ donne une idée de la raréfaction des carrés lorsqu'on avance vers les grands nombres. Une telle suite est une bonne candidate pour représenter le "nombre" (l'hypernombre) des carrés de naturels.

Mais les choses ne s'arrêtent pas là. Pour construire une théorie cohérente des hypernaturels de ce type, il faut considérer des classes d'équivalence de suites de naturels, et la définition de l'équivalence oblige à considérer un ultrafiltre *ad hoc*.

Les hypernaturels que l'on obtient ainsi par comptage n'épuisent pas l'ensemble des hypernaturels de l'analyse non standard, mais peuvent servir à le construire. Ceci fait, on peut passer sans trop de peine aux hyperrationnels et aux hyperréels. L'intérêt d'appuyer la construction des nombres non standard sur le comptage est de leur donner une base intuitive qu'ils n'ont pas dans les autres présentations.

Dans cet article, nous reprenons la théorie des ensembles étiquetés en la motivant le plus possible, ce qui nous a amenés à évoquer brièvement Euclide et Galilée, et à parler des comptages possibles des pavés d'un pavage plan infini. Nous avons été particulièrement attentifs à construire la notion d'ultrafiltre comme élément de la théorie, tout en montrant qu'elle fait difficulté pour le sens commun.

Cet exposé, accessible à des lecteurs non familiers de l'analyse non standard, a été rédigé en s'appuyant explicitement sur l'idée d'enseignement heuristique, dans le sens particulier donné à ce terme par I. Lakatos [7].

Expliquons brièvement ce sens. Beaucoup de concepts mathématiques sont munis de caractéristiques techniques dont l'importance n'est pas perceptible au premier coup d'oeil, et qui sont pourtant nécessaires dans certaines démonstrations. L'idée de Lakatos est de rapprocher au mieux la construction des concepts des preuves où ils jouent un rôle clé, de telle sorte qu'on voie le plus tôt possible leur fonctionnement technique dans les déductions. C'est une façon de clarifier la construction d'une théorie, en montrant qu'on ne pourrait pas évacuer certaines difficultés.

# 1. “Le tout est plus grand que la partie.”

Il est évident que “le tout est plus grand que la partie” : le sens commun nous l’assure au delà de tout doute possible. Aussi n’est-il pas étonnant que l’on trouve cette “vérité” au début des *Eléments* d’Euclide [3], aux alentours de 300 av. J.-C [1].

Pourtant, lorsque le tout est infini, un sérieux doute apparaît, comme en témoigne Galilée dans ses *Discours et démonstrations concernant deux sciences nouvelles*, paru en 1638 [4].

## 1.1. L'infini embarrasse Galilée.

L’ouvrage de Galilée a la forme d’un dialogue entre trois personnages : Salviati qui représente l’auteur, Simplicio et Sagredo. Ces deux derniers jouent un rôle mineur dans l’extrait suivant ([4], p. 31 et ss.).

> SALVIATI. — C’est bien là une des difficultés qui surgissent quand nous discutons, avec notre esprit fini, des choses infinies, et leur attribuons les épithètes que nous utilisons pour les choses finies et limitées ; ce qui, à mon avis, est incorrect, car j’estime que des épithètes comme “plus grand”, “plus petit” et “égal” ne conviennent pas aux grandeurs infinies, dont il est impossible de dire que l’une est plus grande, plus petite ou égale à une autre. Mais voici pour le prouver un raisonnement qui me revient à l’esprit ; pour plus de clarté je vais l’exposer en interrogeant le seigneur Simplicio, qui a formulé la difficulté. Vous savez parfaitement, je suppose, quels nombres sont carrés et quels nombres ne le sont pas.
>
> SIMPLICIO. — Je sais parfaitement qu’un nombre carré provient de la multiplication d’un autre nombre par lui-même ; ainsi quatre, neuf, etc., sont des nombres carrés résultant de la multiplication de deux, trois, etc. par eux-mêmes.
>
> SALVIATI. — Fort bien ; et vous savez aussi que comme les produits sont appelés carrés, les facteurs, c’est-à-dire les termes que l’on multi-

1. Il se peut que l’énoncé explicite du principe, tel qu’il figure au début des *Eléments*, soit une addition due à Proclus (5$^{e}$ siècle apr. J.-C.). Néanmoins Euclide utilise le principe dans les *Eléments* (voir le commentaire de Heath dans [3], Vol. 1, p. 232).

plie, sont appelés côtés ou racines ; quant aux autres nombres qui ne proviennent pas de nombres multipliés par eux-mêmes, ce ne sont pas des carrés. Par conséquent si je dis que les nombres pris dans leur totalité, en incluant les carrés et les non-carrés, sont plus nombreux que les carrés seuls, j'énoncerai, n'est-ce pas, une proposition vraie ?

Simplicio. — Très certainement.

Salviati. — Si je demande maintenant combien il y a de nombres carrés, on peut répondre, sans se tromper, qu'il y en a autant que de racines correspondantes, attendu que tout carré a sa racine et toute racine son carré, qu'un carré n'a pas plus d'une racine, et une racine pas plus d'un carré.

Simplicio. — Exactement.

Salviati. — Mais si je demande combien il y a de racines, on ne peut nier qu'il y en a autant que de nombres, puisque tout nombre est la racine de quelque carré ; cela étant, il faudra donc dire qu'il y autant de nombres carrés qu'il y a de nombres, puisqu'il y a autant de racines, et que les racines représentent l'ensemble des nombres ; et pourtant nous disions au début qu'il y a beaucoup plus de nombres que de carrés, étant donné que la plus grande partie des nombres ne sont pas des carrés. A quoi s'ajoute le fait que la proportion des carrés diminue toujours davantage quand on passe à des nombres plus élevés ; si en effet jusqu'à cent il existe dix carrés, c'est-à-dire la dixième partie de tous les nombres, jusqu'à dix mille un centième seulement des nombres sont des carrés, et jusqu'à un million la millième partie seulement ; pourtant, dans un nombre infiniment grand, il faudrait admettre que les carrés sont aussi nombreux que tous les nombres pris ensemble.

Sagredo. — Qu'en conclure dans ces conditions ?

Salviati. — A mes yeux la seule issue possible est de dire que l'ensemble des nombres est infini, que le nombre des carrés est infini, et le nombre de leurs racines pareillement ; que le total des nombres carrés n'est pas inférieur à l'ensemble des nombres, ni celui-ci supérieur à celui-là [*sic*], et, finalement, que les attributs "égal", "plus grand" et "plus petit" n'ont pas de sens pour les quantités infinies, mais seulement pour les quantités finies.

En résumé, l'ensemble des carrés est strictement inclus dans l'ensemble des nombres naturels ; pourtant on peut établir une bijection entre ces

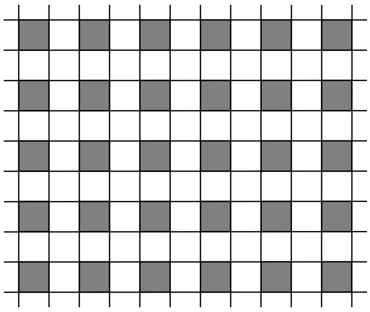


Figure 1

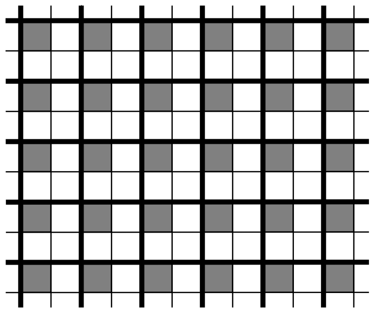


Figure 2

deux ensembles, comme on le voit en les disposant ainsi :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & \ldots \end{array}$$

Face à un tel constat, Galilée conclut que l'infini transcende notre entendement fini (ce sont ses propres termes, voir [4], p. 26). Il ajoute par ailleurs "les hommes ne peuvent pas s'empêcher de les discuter [ces questions], même si c'est de manière indirecte". Ainsi l'infini est incompréhensible mais fascinant.

## 1.2. Regard insolite sur un pavage ordinaire

Avant d'évoquer quelque théorie que ce soit sur les ensembles infinis, considérons un nouvel exemple embarrassant. La figure 1 est un pavage de carreaux blancs et noirs dont on suppose qu'il s'étend aussi loin qu'on veut dans toutes les directions. Il recouvre donc tout le plan. Quel est la proportion de ce pavage occupée par des carreaux noirs ?

Comme le montre la figure 2, on peut décomposer le pavage en cellules comportant chacune un carreau noir et trois carreaux blancs. On a donc envie de dire qu'il y a un carreau noir pour trois blancs, et donc que la proportion des carreaux noirs dans l'ensemble est de 1 sur 4.

Mais il y a une infinité de blancs et une infinité de noirs. Essayons de les numéroter d'une façon qui facilite la comparaison. Nous pouvons parcourir toutes les cellules mentionnées ci-dessus en partant de l'une d'entre elles et en cheminant en spirale.

Ceci fait, nous pouvons numéroter 1, 2, 3 les carreaux blancs de la première cellule et 4 son carreau noir, ensuite numéroter 5, 6, 7 les carreaux blancs de la deuxième cellule et 8 son carreau noir, et ainsi de suite. En faisant cela, nous aurons utilisé tous les nombres naturels à partir de 1 et mis les carrés noirs en bijection avec les multiples de 4.

Or comme nous l'avons vu ci-dessus, on peut mettre les multiples de 4 en bijection avec les naturels. Et donc, en ce sens, il y aurait autant de carreaux noirs que de carreaux au total. Ce constat est aussi troublant que celui de Galilée.

## 1.3. Cantor traite le paradoxe, il ne l'évacue pas.

Une réaction, face aux difficultés provoquées par les ensembles infinis, est de tout faire pour éviter l'infini actuel. C'était celle des Grecs de l'époque classique (Euclide, Archimède, ...) et aussi des mathématiciens du 19e siècle qui ont fondé l'analyse sur le concept de limite. Pour le dire un peu rapidement, ils acceptaient *l'infini potentiel*, c'est-à-dire l'idée que dans certains cas on peut toujours aller plus loin, mais rejetaient *l'infini actuel*, celui que l'on considère comme donné, et donc qui ne doit pas nécessairement être approché par une marche toujours prolongeable et jamais terminée (voir [5] p. 346).

Lorsqu'on met en bijection les naturels et les carrés, on adopte le point de vue de l'infini actuel. Bolzano, au début du 19e siècle a défendu l'idée qu'il ne fallait pas fuir les ensembles infinis. Mais c'est seulement Cantor qui, en 1874, a jeté un jour vraiment nouveau sur la question. Pour expliquer ce qu'il en a dit, considérons un ensemble fini $A$ et une de ses parties $B$. Si $B$ est strictement inclus dans $A$, alors il est impossible d'établir une bijection entre $A$ et $B$, puisque $A$ comporte plus d'éléments que $B$. Tel n'est plus le cas si $A$ est infini, et c'est bien ce que montre l'exemple de Galilée : l'ensemble des carrés des nombres naturels est strictement inclus dans l'ensemble des naturels, et pourtant on construit facilement une bijection entre ces deux ensembles. Cantor a proposé de dire que deux ensembles ont *la même puissance* (on dit aujourd'hui *le même cardinal*) si on peut les mettre en bijection l'un avec l'autre. Il a aussi proposé de définir les ensembles infinis comme ceux que l'on peut mettre en bijection avec une de leurs parties propres. On perçoit l'évolution : Galilée considérait les ensembles infinis comme mystérieux, comme dépassant notre entendement. Sans pour autant évacuer le "paradoxe" [2], Cantor en quelque sorte le domestique. Il donne prise à notre entendement sur les ensembles infinis en appuyant leur définition sur le paradoxe lui-même.

Mais revenons à l'ensemble des carrés, qui a même cardinal que l'ensemble des naturels. Tous les ensembles qui peuvent ainsi être mis en bijection avec les naturels sont dits *dénombrables*. Leur cardinal est appelé *cardinal du dénombrable*. On l'appelle aussi *aleph zéro* et on le note $\aleph_0$.

Mais si Cantor a clarifié la question, il n'a pas fait disparaître la frustration que l'on éprouve en constatant que, du point de vue des cardinaux, on ne peut toujours pas dire qu'il y a moins d'éléments dans l'ensemble des carrés que dans l'ensemble des naturels. En effet le même nombre, à savoir $\aleph_0$, est attribué à ces deux ensembles ! Bien sûr le premier est inclus dans le second, mais c'est une maigre consolation, puisque ce fait demeure intraduisible d'un point de vue numérique.

## 1.4. Ce que suggère le sens commun

Que pouvons-nous faire pour atténuer notre malaise face aux ensembles infinis qui heurtent notre intuition ? Partons de l'ensemble des nombres pairs non nuls et regardons-le d'un point de vue naïf. Si nous voulons montrer la bijection entre $2\mathbb{N}_0$ et $\mathbb{N}_0$, nous pouvons mettre les nombres pairs en regard des naturels, comme ceci :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & \dots \end{array}$$

Disposons-les maintenant plutôt comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & \dots \end{array}$$

2. Le terme "paradoxe" est pris ici et ultérieurement dans le sens qu'on lui attribue dans la langue commune et non comme synonyme de contradiction.

Sur cette disposition, "on voit" qu'il y en a deux fois moins que de naturels non nuls. Mais qu'entend-on par "on voit" ? En fait, on le voit si on ne considère que les débuts des deux suites, c'est-à-dire les deux suites jusqu'à un nombre fini (pair). Par exemple, si on compte le nombre d'éléments jusqu'à 10 dans les deux ensembles, on voit que l'un en contient 10 et l'autre 5 ; jusqu'à 30, ils en ont respectivement 30 et 15 ; jusqu'à $n$ (pair), ils en ont respectivement $n$ et $n/2$.

Ce que nous aimerions, c'est que le rapport $\frac{1}{2}$ soit conservé, même si on compte les éléments "jusqu'au bout". En d'autres termes, si $\omega_0$ désigne [3] le nombre de naturels non nuls, le nombre de naturels pairs non nuls devrait être $\omega_0/2$.

Ce premier exemple en suggère une infinité d'autres. En rangeant les multiples de 4 de manière analogue, on arrive à souhaiter que le nombre de multiples de 4 non nuls soit $\omega_0/4$. Plus généralement, le nombre des multiples de $k$ serait $\omega_0/k$.

L'exemple des carrés de Galilée conduit au tableau

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ 1 & & & 4 & & & & & 9 & & \dots \end{array}$$

Le nombre de carrés jusqu'à 4 est $\sqrt{4}$, jusqu'à 9 c'est $\sqrt{9}$, ... jusque $n$ c'est $\sqrt{n}$, à condition que $n$ soit un carré parfait. Sinon, le nombre de carrés jusqu'à $n$ est $\mathrm{ent}\sqrt{n}$, où "ent" veut dire "la partie entière de". On aimerait donc aboutir à ce que le nombre total des carrés soit $\sqrt{\omega_0}$ ou $\mathrm{ent}\sqrt{\omega_0}$. Cette fonction "ent" est un peu perturbante au stade actuel. Ne nous y attardons pas pour l'instant, car nous aurons l'occasion d'y revenir.

Par ailleurs, on aimerait pouvoir aussi "compter" $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. On observe que dans la présentation suivante

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

jusqu'à $n$, il y a $n+1$ éléments. Il faudrait donc qu'il y ait $\omega_0 + 1$ éléments dans $\mathbb{N}$.

3. On adopte ici $\omega_0$ et non $\aleph_0$, parce que la théorie qui suit n'est pas celle des cardinaux de Cantor.

Considérons maintenant $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. On aimerait que cet ensemble ait $2\omega_0 + 1$ éléments. Mais en le mettant naïvement en regard de $\mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \end{array}$$

et l'idée de compter les éléments de $\mathbb{Z}$ jusqu'à $n$ ne fonctionne plus. On peut alors trouver une autre présentation en rangeant les négatifs sous *l'étiquette* du positif correspondant (c'est-à-dire sous sa valeur absolue), ce qui donne

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & \ldots \end{array}$$

Alors, si on considère les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$ comme *étiquetés* par leur valeur absolue, le compte des éléments jusqu'à l'étiquette $n$ donne $2n + 1$.

Dans la suite, le compte des éléments jusqu'à l'étiquette $n$ sera simplement appelé *le compte jusqu'à n*.

Essayons d'appliquer cette idée à l'ensemble $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Il se dispose naturellement en un "tableau carré infini", comme ceci :

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 1 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \ldots \\ 2 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & \ldots \\ 3 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & \ldots \\ 4 & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & \ldots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

On voudrait qu'il y en ait $\omega_0^2$. Pour cela, il faut les étiqueter de sorte que jusqu'à l'étiquette 1 il y en ait 1, jusqu'à l'étiquette 2 il y en ait 4, jusqu'à l'étiquette 3 il y en ait 9, $\ldots$ et jusqu'à l'étiquette $n$, il y en ait $n^2$. Cela nous amène à étiqueter les éléments comme ceci :

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
2 & 2 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
3 & 3 & 3 & 3 & 4 & \dots \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \dots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

ce qui revient à attribuer au couple $(i, j)$ l'étiquette $\max(i, j)$.

Pour les parties de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, nous parlerons d'*étiquetage naturel* lorsqu'à chaque élément nous associons le naturel qui lui correspond dans les étiquetages décrits ci-dessus : pour un élément de $\mathbb{N}$, le nombre lui-même, pour un élément de $\mathbb{Z}$, sa valeur absolue, pour un élément $(i, j)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, le maximum de $i$ et $j$.

Arrêtons-nous un moment pour analyser notre démarche. Nous avons considéré des ensembles dénombrables et avons étiqueté leurs éléments avec des naturels. Dans chaque cas, nous avons compté le nombre des éléments de l'ensemble jusqu'à l'étiquette 1, l'étiquette 2, ..., l'étiquette $n$. Et la seule chose que nous ayons ajoutée est un souhait : à savoir que la formule donnant le compte jusqu'à l'étiquette $n$, donne aussi le compte "jusqu'au bout".

Poursuivons maintenant notre quête des nombres à faire correspondre aux ensembles dénombrables infinis.

## 2. Un projet de théorie

Que nous disent nos exemples ? Chaque fois nous avons écrit en ligne les nombres naturels servant d'étiquettes. Parfois cette ligne commençait à 0, et parfois à 1. Décidons de commencer toujours à 0. Sous la ligne des étiquettes, nous avons écrit les éléments de l'ensemble que nous voulons compter, et il y avait parfois plusieurs éléments sous une même étiquette (néanmoins toujours un nombre fini). Nous pouvons imaginer que chaque étiquette est collée sur une boîte, et que celle-ci contient les éléments correspondants.

Pour compter les éléments d'un ensemble, nous pouvons oublier la nature de ceux-ci. Cette remarque nous permet de simplifier nos écritures : décidons d'écrire sous chaque étiquette, non pas les éléments correspondants (ceux que nous imaginons dans la boîte), mais seulement leur nombre.

Dans ces conditions, l'ensemble des carrés non nuls sera présenté comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \end{array}$$

l'ensemble $\mathbb{Z}$ "mis en boîte" comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots \end{array}$$

et l'ensemble $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & \ldots \end{array}$$

Reprenons notre projet qui est d'affecter un nombre à tout ensemble dénombrable étiqueté. Nos exemples nous montrent le chemin. Nous nous guiderons aussi sur l'exigence suivante, qui paraît s'imposer : il faut arriver à créer des "nombres infinis" qui étendent les nombres finis et fonctionnent pour l'essentiel comme eux. Autrement dit, notre objectif n'est pas simplement de définir des nombres infinis, objets de contemplation, mais bien de construire un système de nombres qui généralise celui des nombres naturels.

Il nous faudra pour cela voir comment étiqueter les ensembles finis. Nous devrons ensuite

(a) dire quand deux ensembles étiquetés, infinis ou non, auront le même nombre d'éléments ;

(b) pouvoir comparer les nouveaux nombres, c'est-à-dire les ordonner ;

(c) définir pour eux les opérations ordinaires telles que l'addition, la multiplication, etc.

Or l'ordre et les opérations sur les naturels sont intéressants parce qu'ils répondent à des questions sur les ensembles finis : l'ordre indique s'il existe une injection ou une bijection d'un ensemble vers l'autre, l'addition donne le cardinal de la réunion de deux ensembles disjoints, le produit donne le nombre d'éléments du produit cartésien de deux ensembles, etc. Nous devrons donc préciser à quel ordre sur les ensembles étiquetés correspondra l'ordre sur les nouveaux nombres ; nous devrons ensuite définir pour les ensembles étiquetés les correspondants de la réunion disjointe, du produit cartésien, etc. Tel est le programme que nous attaquons maintenant.

Commençons par définir “l'étiquetage”.

> On dit qu'on *étiquette* un ensemble dénombrable lorsqu'on affecte un naturel à chacun de ses éléments ; ce naturel, qui ne peut être utilisé qu'un nombre fini de fois, est appelé l'*étiquette* de l'élément auquel il est affecté.

Une convention d'écriture nous aidera à y voir clair. Un ensemble étiqueté $A$ peut se décrire comme une suite du type $a_A(n)$ donnant le nombre d'éléments pour chaque étiquette $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Le compte jusqu'à $n$ pour $a_A(n)$ n'est autre que

$$c_A(n) = \sum_{i=0}^{n} a_A(i).$$

Nous présenterons nos exemples d'ensembles étiquetés sur le modèle suivant :

$$\begin{array}{rcccccccccc} n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ a_A(n): & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & \ldots \\ c_A(n): & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots \end{array}$$

Ainsi l'étiquette est désignée par $n$, le nombre d'éléments de la boîte $n$ par $a_A(n)$, le compte jusqu'à $n$ par $c_A(n)$. Il nous arrivera, pour alléger l'écriture, de ne présenter qu'une des dernières lignes.

Dans cette notation, un ensemble étiqueté fini sera caractérisé par le fait que la ligne des $a_A(n)$ se terminera sur la droite par une suite infinie de zéros (des boîtes vides), et la ligne des $c_A(n)$ par une suite infinie constante, la constante étant le cardinal de l'ensemble.

# 3. L'équinumérosité et l'ordre

## 3.1. Deux définitions à l'essai

Commençons par définir quand deux ensembles étiquetés sont isomorphes.

Nous dirons que deux ensembles étiquetés sont *isomorphes* si dans les deux ensembles, les boîtes de même étiquette contiennent un même nombre d'éléments. En d'autres termes, deux ensembles étiquetés sont isomorphes s'ils sont représentés par la même suite de naturels.

Quand dirons-nous que deux ensembles étiquetés *ont le même nombre d'éléments* (ou qu'ils sont *équinombreux*)? Tout d'abord, et bien entendu, s'ils sont isomorphes, ils seront aussi équinombreux.

Mais on voudrait aussi que si on déplace un élément d'une boîte dans une autre, on ne change pas le nombre de l'ensemble. Par exemple, on voudrait que

$$\begin{array}{rcccccccc} n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ a_A(n): & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \dots \end{array}$$

soit équinombreux à

$$\begin{array}{rcccccccc} n: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ a_A(n): & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & \dots \end{array}$$

Plus généralement, on voudrait que le nombre de l'ensemble ne change pas si on change de boîte un nombre fini d'éléments. On arriverait à cela en disant que deux ensembles étiquetés sont équinombreux si leurs comptes jusqu'à $n$ coïncident au moins à partir d'un certain $p$.

Cette définition satisfait à la condition que deux ensembles étiquetés finis de même cardinal soient équinombreux, ce que nous voulons. De plus, l'équinumérosité ainsi conçue est une relation d'équivalence. En effet, elle est clairement réflexive et symétrique. Elle est aussi transitive, car si $c_A(n)$ et $c_B(n)$ coïncident à partir d'un certain nombre $p$, et si $c_B(n)$ et $c_C(n)$ coïncident à partir d'un certain nombre $q$, alors $c_A(n)$ et $c_C(n)$ coïncident au moins à partir du plus grand des deux nombres $p$ et $q$.

Pour exprimer que deux ensembles $A$ et $B$ sont équinombreux, nous écrirons $A \simeq B$.

Une fois cette équivalence définie, voyons comment nous déterminerons, de deux ensembles étiquetés $A$ et $B$, lequel est *moins nombreux*, ou *plus petit*, que l'autre. Il nous faut donc définir une relation que nous écrirons $A \sqsubseteq B$ et que nous lirons "$A$ est plus petit que $B$".

Une définition semble s'imposer, par analogie avec la définition de $\simeq$. Nous dirions qu'un ensemble étiqueté $A$ est plus petit qu'un autre $B$ si, au moins à partir d'un certain rang $p$, les comptes jusqu'à $n$ du premier sont plus petits ou égaux aux comptes jusqu'à $n$ du second.

La relation "être moins nombreux que" ainsi définie est clairement réflexive, antisymétrique (à condition de considérer $\simeq$ plutôt que $=$) [4] et transitive.

De plus elle généralise l'ordre sur les cardinaux pour les ensembles finis. Soient par exemple les deux sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$,

$$A = \{1, 30, 70\}$$

et

$$B = \{0, 20, 80, 1040\}$$

munis de leur étiquetage naturel. Il suffit d'examiner les comptes jusqu'à $n$ à partir de 1 040 pour vérifier que $A \sqsubseteq B$.

Mais cette relation engendre-t-elle bien un ordre total ? En d'autres termes, deux ensembles étiquetés $A$ et $B$ sont-ils toujours comparables ?

Tel n'est malheureusement pas le cas. Considérons en effet les deux ensembles dont les comptes jusqu'à $n$ sont les suivants :

$$c_A(n) : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$$

et

$$c_B(n) : 2, 2, 2, 5, 5, 5, 8, 8, 8, \ldots$$

4. Cette restriction n'aura pas d'importance pour ce qui suit. En effet, à la section 4.1 nous définirons les nombres d'éléments d'un ensemble étiqueté $A$ comme classe d'équivalence des suites $c_A(n)$ pour la relation $\simeq$ ; ceci nous ramènera à l'antisymétrie au sens ordinaire.

Ils ne sont pas comparables, selon les définitions adoptées jusqu'ici. En effet, pour une infinité de valeurs de $n$, les comptes jusqu'à $n$ sont égaux, pour une autre infinité, ils sont inégaux dans un sens et pour une autre infinité encore, ils sont inégaux dans l'autre sens. Que faire ?

De toutes façons, nous devons changer notre définition de l'ordre. Nous devons le définir de sorte que les ensembles étiquetés $A$ et $B$ ci-dessus soient comparables. Or nous ne pouvons pas exiger que $c_A(n) \leqslant c_B(n)$ (ou l'inverse) pour *tous* les $n$ à partir d'un certain $p$. Force nous sera sans doute d'exiger que $c_A(n) \leqslant c_B(n)$ pour *une partie des* $n$, sachant bien que dans certains cas, il y aura des $n$ arbitrairement grands pour lesquels on aura $c_A(n) < c_B(n)$. On aurait envie d'exiger que $c_A(n) \leqslant c_B(n)$ *pour une majorité de* $n$ [5]. Mais l'exemple ci-dessus montre qu'il ne pourra pas s'agir d'une majorité conforme au sens commun. En effet, dans cet exemple, et selon le sens commun, il y a "autant" de valeurs de $n$ pour lesquelles les comptes sont égaux, "autant" pour lesquels ils sont inégaux dans un sens et "autant" pour lesquels ils sont inégaux dans l'autre. Ainsi, quelle que soit "la bonne partie des $n$" que nous choisirons, elle aura quelque chose d'arbitraire. Le choix ne sera pas démocratique. Il y aura des parties favorisées.

Essayons maintenant de régler la question : comment choisir un type d'ensemble (on sent bien que ce seront des ensembles infinis) qui nous fournisse de bonnes définitions pour l'équinumérosité et l'ordre ? Plus précisément, essayons de désigner des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, que nous appellerons ensembles *qualifiés*, tels que les deux définitions suivantes fournissent une équivalence et un ordre :

> Deux ensembles étiquetés $A$ et $B$ sont dits *équinombreux* si l'ensemble des $n$ pour lesquels $c_A(n)$ et $c_B(n)$ sont égaux est un ensemble qualifié.
>
> Un ensemble étiqueté $A$ est dit *moins nombreux* qu'un ensemble étiqueté $B$, si l'ensemble des $n$ sur lequel $c_A(n)$ est plus petit ou égal à $c_B(n)$ est un ensemble qualifié.

5. Il faut prendre le terme "majorité" au sens commun ; il est difficile d'exprimer exactement ce que l'on entend par là si ce n'est justement en construisant une théorie comme nous sommes en train de le faire.

## 3.2. Des ensembles qualifiés, un ultrafiltre

Nous voulons que la relation d'équinumérosité $\simeq$ soit une équivalence. Pour qu'elle soit réflexive, il faut que $\mathbb{N}$ lui-même soit qualifié. Nous exigerons donc :

[Q1] $\mathbb{N}$ *est qualifié.*

La symétrie ira de soi, quel que soit notre choix. Examinons la transitivité. Si les comptes jusqu'à $n$ de $A$ et $B$ coïncident sur un ensemble qualifié $E$ et ceux de $B$ et $C$ sur un ensemble qualifié $F$, nous devons définir *qualifié* pour que l'ensemble sur lequel les comptes jusqu'à $n$ de $A$ et $C$ coïncident soit qualifié. Or ces comptes coïncident au moins sur $E \cap F$, mais peut-être aussi sur un ensemble plus large, comme l'exemple suivant suffit à le montrer :

$$\begin{array}{rcccccccccccc} c_A(n) & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ c_B(n) & : & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 8 & 8 & 10 & \dots \\ c_C(n) & : & 2 & 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 & 8 & 10 & \dots \end{array}$$

D'où la condition suivante :

[Q2] *Si $E$ et $F$ sont qualifiés, tout ensemble incluant $E \cap F$ l'est aussi.*

Notons au passage que cette condition est équivalente aux deux suivantes (prises ensemble), peut-être plus faciles à utiliser :

[Q2′] *Si $E$ et $F$ sont qualifiés, $E \cap F$ l'est aussi.*

[Q2″] *Si $E$ est qualifié, et si $E \subset F$, alors $F$ est qualifié.*

Venons-en maintenant à la relation $\sqsubseteq$ dont nous voulons qu'elle engendre un ordre total. D'abord, elle est clairement réflexive quel que soit notre choix pour les ensembles qualifiés. Ensuite, elle est antisymétrique (à condition de considérer $\simeq$ plutôt que $=$) par la propriété [Q2′]. Elle est transitive par la propriété [Q2].

Voyons ensuite ce qu'il faut exiger pour que deux ensembles étiquetés soient toujours comparables. Soient $A$ et $B$ deux ensembles étiquetés. Soit $A \not\sqsubseteq B$, c'est-à-dire que l'ensemble sur lequel $c_A(n) \leqslant c_B(n)$ n'est pas qualifié. Si on exige que le complémentaire de cet ensemble soit qualifié, on aura que $c_A(n) > c_B(n)$, et a fortiori que $c_A(n) \geqslant c_B(n)$ sur un ensemble qualifié (par la propriété [Q2″]). Donc on aura $B \sqsubseteq A$.

De plus, il faut exclure qu'un ensemble et son complémentaire soient tous deux qualifiés, car sinon, par la propriété [Q2′], l'ensemble $\varnothing$ serait qualifié, ce que nous excluons. Nous en arrivons donc à une quatrième propriété des ensembles qualifiés :

[Q3] *Quel que soit l'ensemble $E$ (sous-ensemble de $\mathbb{N}$), soit $E$ est qualifié, soit $\mathbb{N} \setminus E$ l'est.*

Observons que puisque $\mathbb{N}$ est qualifié, l'ensemble vide ne l'est pas.

En résumé, ce que nous voyons jusqu'à présent, c'est que les ensembles qualifiés, qui sont des parties de $\mathbb{N}$, devront satisfaire aux propriétés [Q1] à [Q3]. Mais il se peut qu'il y ait bien des façons de choisir un tel ensemble de parties de $\mathbb{N}$. Ceci n'est d'ailleurs pas difficile à vérifier.

Par exemple, toutes les parties de $\mathbb{N}$ contenant le nombre 2 satisfont aux propriétés en question. Mais aussi toutes les parties de $\mathbb{N}$ contenant le nombre 3. Et ainsi de suite. Par contre, si on considère à la fois les parties de $\mathbb{N}$ contenant le nombre 2 et celles contenant le nombre 3, alors elles ne vérifient plus les propriétés [Q2′] et [Q3].

On dit qu'un ensemble de parties de $\mathbb{N}$ satisfaisant aux propriétés [Q1] à [Q3] est un *ultrafiltre.*

Puisqu'il existe plusieurs ultrafiltres, la question se pose encore de savoir quel est celui, ou quels sont ceux, qui nous conviendront. Par exemple, si nous prenons pour ensembles qualifiés tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ contenant 2, alors notre définition de $\simeq$ revient à dire que deux ensembles sont équinombreux si leurs comptes jusqu'à 2 sont égaux. Et on peut dire quelque chose d'analogue pour $\sqsubseteq$. Donc les ensembles contenant 2 (ou 3, ...) ne constituent pas un ultrafiltre acceptable.

Plus généralement, il semblerait déraisonnable d'accepter des ensembles finis parmi les ensembles qualifiés. En effet, cela reviendrait, si on considère deux ensembles étiquetés *infinis*, à juger de leur équivalence ou de leur non équivalence sur un ensemble fini d'indices. Ce ne serait guère plausible.

C'est pourquoi nous ajoutons la condition suivante :

[Q4] *Aucun ensemble fini n'est qualifié.*

On peut prouver (voir par exemple [8]) en utilisant l'axiome du choix, qu'il existe des ultrafiltres vérifiant cette dernière condition.

On appelle ultrafiltres *non principaux*, les ultrafiltres vérifiant la condition [Q4].

Malheureusement, on ne peut pas en construire, l'axiome du choix n'étant pas constructif. Ceci nous laisse dans une situation quelque peu inconfortable : nous savons qu'il existe des ultrafiltres, mais nous ne pouvons pas les voir.

Il serait pourtant plus pratique de travailler avec un ultrafiltre connu de manière à pouvoir dire, de n'importe quelle partie de $\mathbb{N}$, si elle est ou non qualifiée. C'est impossible, mais il est néanmoins permis de préciser l'ultrafiltre en imposant qu'il contienne certaines parties [6] de $\mathbb{N}$. Par exemple, on peut imposer ceci :

[Q5] *Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}_0$, $A_k = \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est qualifié*

et

[Q6] *Pour tout $k$ dans $\mathbb{N}_0$, $B_k = \{n^k \mid n \in \mathbb{N}\}$ est qualifié.*

C'est ce que nous allons faire. Cela nous permettra de nous exprimer plus clairement en citant dans nos exemples des ensembles qualifiés.

Il sera commode dans la suite, lorsque nous rencontrerons une propriété $P(n)$ vraie pour tout $n$ appartenant à un ensemble de notre ultrafiltre, de dire que la propriété est vraie *pour presque tout $n$* ou encore que $P(n)$ est vraie *presque partout.* Ces expressions sont consacrées. On fera bien toutefois de se souvenir qu'elles sont trompeuses dans la mesure où elles donnent à penser qu'un ensemble de l'ultrafiltre est nécessairement "majoritaire" (et même "très majoritaire"), alors que nous savons qu'il n'en est rien puisque par [Q6]

$$B_2 = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\},$$

par exemple, est qualifié.

6. Ceci est prouvé dans l'Appendice.

# 4. “Nombre d'éléments” d'un ensemble étiqueté

## 4.1. Numérosité

Supposons que nous ayons fixé un ultrafiltre. Puisque nous avons défini l’équinumérosité pour qu’elle soit une relation d’équivalence sur les ensembles étiquetés, il est naturel que nous définissions ensuite le “nombre d’éléments” d’un ensemble étiqueté comme la classe d’équivalence de cet ensemble pour l’équinumérosité. Nous définissons donc :

> La *numérosité* d’un ensemble étiqueté $A$ est la classe d’équivalence de cet ensemble pour l’équinumérosité. Nous la noterons $\nu(A)$ et nous noterons ${}^{\bullet}\mathbb{N}$ l’ensemble des numérosités de tous les ensembles étiquetés.

C’est par une démarche analogue que l’on définit le cardinal d’un ensemble fini comme la classe d’équivalence de cet ensemble pour la relation d’ “équipotence” (existence d’une bijection).

Mais quel rapport y a-t-il entre ces classes d’équivalence et les “nombres” $\omega_0$, $2\omega_0 + 1$, $\omega_0^2$, $\ldots$ dont nous avons parlé (voir section 1.4) ? En fait, si $c_A(n)$ est la suite des comptes jusqu’à $n$ de l’ensemble étiqueté $A$, nous aimerions que la numérosité de $A$ s’écrive $c_A(\omega_0)$.

Pour que cette écriture ait un sens, il vaudrait mieux qu’à une classe d’équivalence $\nu(A)$ corresponde une seule suite $c_A(n)$ et vice versa. Ce n’est pas tout-à-fait le cas, mais “presque”. En effet, deux ensembles étiquetés appartiennent à la même classe si et seulement si leurs comptes jusqu’à $n$ coïncident pour presque tout $n$.

Autrement dit, si $\nu(A)$ s’écrit de plusieurs façons, par exemple $c_A(\omega_0)$ et $c'_A(\omega_0)$, c’est que les fonctions $c_A$ et $c'_A$ coïncident sur une partie qualifiée de $\mathbb{N}$.

Nous emploierons donc la notation suivante :

> Soit $A$ un ensemble étiqueté déterminé par la suite $c_A(n)$ de ses comptes jusqu’à $n$. La numérosité de $A$ s’écrit $c_A(\omega_0)$.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}_0$ muni de son étiquetage naturel a comme comme compte jusqu'à $n$, $c_{\mathbb{N}_0}(n) = n$. Nous écrirons donc

$$\nu(\mathbb{N}_0) = \omega_0.$$

Pour l'ensemble des nombres pairs non nuls, nous pouvons écrire indifféremment

$$\nu(2\mathbb{N}_0) = \mathrm{ent}(\frac{\omega_0}{2})$$

ou

$$\nu(2\mathbb{N}_0) = \frac{\omega_0}{2},$$

puisque les suites $\mathrm{ent}(n/2)$ et $n/2$ coïncident sur l'ensemble des nombres pairs, qui est qualifié dans $\mathbb{N}$ (d'après [Q5]).

Lorsque nous chercherons l'expression d'une suite des comptes jusqu'à $n$ d'un ensemble étiqueté, nous pourrons donc nous limiter à la regarder sur une partie qualifiée de $\mathbb{N}$ (et peu importe laquelle). Par exemple, pour $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$, nous pouvons écrire $\nu(A) = \sqrt{\omega_0}$, puisque $c_A(n) = \sqrt{n}$ pour presque tout $n$ (d'après [Q6]).

Pour un ensemble fini $A$ dont le cardinal est $N$, nous aurons $\nu(A) = N$. Ce dernier exemple nous montre que les numérosités s'écrivent comme les naturels quand elles correspondent à des ensembles finis. Dans ce cas, nous les identifierons aux naturels qui les représentent. Nous pouvons donc considérer que $\mathbb{N}$ est strictement inclus dans ${}^\bullet\mathbb{N}$.

A ce stade de notre construction, les numérosités ne sont encore que des classes d'équivalence (notées $\nu(A)$) représentées par des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (notées $c_A(n)$). Elles ne sont pas encore véritablement des nombres, car nous ne les avons pas munies d'un ordre, ni des deux opérations d'addition et de multiplication. C'est ce que nous allons faire maintenant.

## 4.2. Ordre et opérations sur les numérosités

Voici pour commencer quelques exemples de ce que nous aimerions affirmer :

$$\frac{\omega_0}{2} \leqslant 2\omega_0, \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
2\omega_0 \cdot \frac{\omega_0}{2} &= \omega_0^2, && (2)\\
\frac{\omega_0}{2} \cdot \frac{\omega_0}{2} &= \frac{\omega_0^2}{4}, && (3)\\
2\omega_0 + 3\omega_0 &= 5\omega_0, && (4)\\
\omega_0 + 1 &= (\omega_0) + (1), && (5)
\end{aligned}
$$

où la dernière égalité peut s'écrire aussi, par exemple,

$$\nu(\mathbb{N}) = \nu(\mathbb{N}_0) + \nu(\{5\}).$$

Commençons par l'ordre, et inspirons-nous pour cela de l'inégalité (1). Si $\nu(A) = \omega_0/2$ et $\nu(B) = 2\omega_0$, c'est que $c_A(n) = n/2$ et $c_B(n) = 2n$ pour presque tout $n$. Et si nous voulons que

$$\frac{\omega_0}{2} \leqslant 2\omega_0,$$

c'est parce que, pour tout $n$,

$$\frac{n}{2} \leqslant 2n,$$

et donc, pour presque tout $n$,

$$c_A(n) \leqslant c_B(n).$$

Ceci nous amène à définir l'ordre de la façon suivante : étant donnés deux ensembles étiquetés $A$ et $B$, nous écrirons que

$$\nu(A) \leqslant \nu(B)$$

si

$$A \sqsubseteq B.$$

Ceci revient à dire (voir section 3.1) que

$$\nu(A) \leqslant \nu(B)$$

si

$$c_A(n) \leqslant c_B(n) \text{ pour presque tout } n.$$

Cette définition nous assure que $\leqslant$ est un ordre total (et cette fois, il s'agit bien, en ce qui concerne l'antisymétrie, de $=$ et non de $\simeq$).

Venons-en maintenant à l'addition. Nous voulons définir une addition qui généralise celle que nous connaissons pour les naturels. En particulier, nous voulons qu'elle soit commutative et associative, et qu'elle possède un élément neutre. En outre, dans $\mathbb{N}$ on a la propriété suivante :

*si $a$ et $b$ sont deux naturels et si $a \leqslant b$,*
*il existe un $c$ dans $\mathbb{N}$ tel que $a + c = b$.*

Nous voulons de même que

*si deux numérosités $\nu(A)$ et $\nu(B)$ sont telles que $\nu(A) \leqslant \nu(B)$,*
*il existe une numérosité $\nu(C)$ telle que*

$$\nu(A) + \nu(C) = \nu(B). \tag{6}$$

Commençons par rappeler que, du point de vue de la numérosité, tout ensemble $A$ est entièrement déterminé par la suite $c_A(n)$. Inversement, toute suite croissante représente une classe d'ensembles étiquetés notée $c_A(\omega_0)$ où $A$ est un représentant de la classe.

Nous voulons définir l'addition pour que les égalités (4) et (5), par exemple, soient vérifiées. Plus généralement, quelles que soient les numérosités $c_A(\omega_0)$ et $c_B(\omega_0)$, nous voulons que

$$c_A(\omega_0) + c_B(\omega_0) = (c_A + c_B)(\omega_0),$$

où la suite $(c_A + c_B)(n)$, puisqu'elle est croissante, représente bien une classe d'ensembles étiquetés notée $(c_A + c_B)(\omega_0)$. Ceci constitue une définition de la *somme.*

Mais cette définition porte sur les suites. Nous aimerions trouver son équivalent sur les ensembles, autrement dit, trouver un représentant $C$ de la classe $(c_A + c_B)(\omega_0)$.

L'idée la plus naturelle consiste à s'inspirer de la réunion disjointe. Soient $A$ et $B$ deux ensembles étiquetés disjoints. Notons $A \uplus B$ leur réunion, étiquetée de telle sorte que chaque élément de $A$ et de $B$ garde l'étiquette qu'il avait dans $A$ ou $B$. Dans ces conditions, les nombres d'éléments dans les boîtes de $A \uplus B$ sont donnés par

$$a_{A \uplus B}(n) = a_A(n) + a_B(n).$$

Et de même les comptes jusqu'à $n$ de $A \uplus B$ sont donnés par

$$c_{A \uplus B}(n) = c_A(n) + c_B(n).$$

Par ailleurs si $A'$ et $B'$ sont deux ensembles étiquetés tels que $A' \simeq A$ et $B' \simeq B$, on a presque partout

$$c_{A' \uplus B'}(n) = c_A(n) + c_B(n).$$

Ceci nous permet de définir, sans ambiguïté et en cohérence avec la définition précédente, la *somme* de $\nu(A)$ et $\nu(B)$ par l'égalité

$$\nu(A) + \nu(B) = \nu(A \uplus B).$$

Vérifions que l'addition ainsi définie a bien les propriétés requises. Elle est clairement commutative et associative. Elle possède un neutre, qui est la classe d'équivalence de l'ensemble étiqueté dont toutes les boîtes sont vides. Par contre, et ceci est une surprise, elle ne possède pas la propriété (6) requise ci-dessus. En effet, soient $\nu(A)$ et $\nu(B)$ tels que $\nu(A) \leqslant \nu(B)$. Cette inégalité s'écrit encore

$$c_A(\omega_0) \leqslant c_B(\omega_0),$$

et signifie en fait que, presque partout

$$c_A(n) \leqslant c_B(n).$$

Comme il n'y a aucune raison que $c_B(n) - c_A(n)$ soit une suite croissante, fut-ce presque partout, il n'existe en général pas d'ensemble étiqueté $C$ tel que

$$c_A(n) + c_C(n) = c_B(n)$$

presque partout. Ainsi la soustraction n'est pas définie pour les numérosités comme elle l'est pour les naturels. Nous reviendrons ci-dessous sur cette difficulté.

Mais avant cela, occupons-nous de définir la multiplication. Nous voulons qu'elle généralise la multiplication des naturels ; entre autres, qu'elle soit commutative et associative, et qu'elle soit distributive par rapport à l'addition.

Nous voulons, par exemple, que les égalités (2) et (3) soient vérifiées.

Plus généralement, quelles que soient les numérosités $c_A(\omega_0)$ et $c_B(\omega_0)$, nous voulons que

$$c_A(\omega_0) \cdot c_B(\omega_0) = (c_A \cdot c_B)(\omega_0),$$

où la suite $(c_A \cdot c_B)(n)$, puisqu'elle est croissante, représente bien une classe d'ensembles étiquetés notée $(c_A \cdot c_B)(\omega_0)$. Ceci constitue une définition du *produit* de deux numérosités.

Comme pour l'addition, nous voudrions trouver un représentant $C$ de la classe $(c_A \cdot c_B)(\omega_0)$.

Il est assez naturel de faire correspondre la multiplication au produit cartésien, c'est-à-dire que, si $A$ et $B$ sont deux ensembles étiquetés, on ait

$$\nu(A) \cdot \nu(B) = \nu(A \times B).$$

Mais comment allons-nous étiqueter le produit cartésien $A \times B$ pour que cette nouvelle définition soit cohérente avec la précédente? Pour y arriver, il suffit de généraliser la manière dont nous avons étiqueté $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ à la fin de la section 1.4. Prenons un exemple :

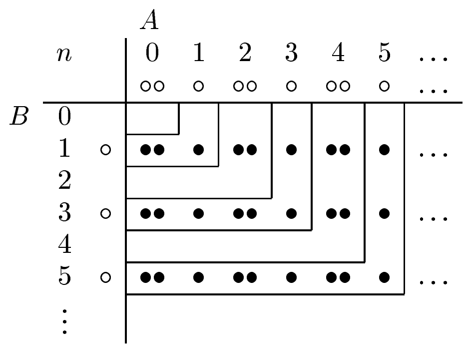
$$\begin{array}{cclcccccccc}
A & : & n & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
 & & a_A(n) & : & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \ldots \\
 & & c_A(n) & : & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & \ldots \\
 & & & & & & & & & & \\
B & : & n & : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
 & & a_B(n) & : & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
 & & c_B(n) & : & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \ldots
\end{array}$$

Représentons le produit cartésien de $A$ et $B$ comme ceci :

$$\begin{array}{ccc|ccccccc}
 & & & A & & & & & & \\
 & n & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
 & & & \circ\circ & \circ & \circ\circ & \circ & \circ\circ & \circ & \ldots \\
\hline
B & 0 & & & & & & & & \\
 & 1 & \circ & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \ldots \\
 & 2 & & & & & & & & \\
 & 3 & \circ & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \ldots \\
 & 4 & & & & & & & & \\
 & 5 & \circ & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \bullet\bullet & \bullet & \ldots \\
 & \vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Dans ce tableau, chaque petit rond blanc représente, à la deuxième ligne, un élément de $A$, et à la deuxième colonne, un élément de $B$. Pour le reste, à l'intersection d'une ligne et d'une colonne, chaque petit rond noir désigne un élément du produit cartésien.

Nous voulons que le compte jusqu'à $n$ de $A \times B$ soit $c_A(n) \cdot c_B(n)$. Chaque élément de $A \times B$ est un couple constitué d'un élément de $A$ et d'un élément de $B$. Chacun de ces deux éléments possède une étiquette. Choisissons la plus grande des deux pour étiqueter le couple. Ceci revient à mettre les éléments de $A \times B$ dans des boîtes en forme d'équerre (sauf pour la première) comme ceci :




De cette façon, nous obtenons bien que le compte jusqu'à $n$ pour $A \times B$ est
$$c_{A \times B}(n) = c_A(n) \cdot c_B(n).$$

Comme nous l'avons montré pour l'addition, il est vrai ici aussi que si $A' \simeq A$ et $B' \simeq B$, on a presque partout

$$c_{A' \times B'}(n) = c_A(n) \cdot c_B(n).$$

Ceci nous autorise à définir *la multiplication* comme annoncé, sans ambiguïté. Qui plus est, la multiplication possède bien les propriétés annoncées : commutativité, associativité et distributivité par rapport à l'addition.

## 4.3. Les numérosités sont insuffisantes

Revenons sur la difficulté constatée ci-dessus, à savoir l'impossibilité de définir de manière générale une soustraction pour les numérosités. Pour dépasser cette difficulté, il suffirait qu'au lieu des suites croissantes, nous considérions des suites quelconques (de nombres naturels toujours). C'est bien ce que nous allons faire, tout en remarquant que ce ne sera pas entièrement satisfaisant. En effet, alors qu'une suite croissante correspond toujours à un ensemble étiqueté, il n'en va pas de même d'une suite quelconque.

Prenons le temps de développer cette dernière affirmation. Pour ce faire, un changement de notations s'impose. En effet, nous notions jusqu'à présent $c_A(n)$ la suite des comptes jusqu'à $n$ d'un ensemble étiqueté $A$. Puisque les suites que nous allons considérer ne correspondront plus à des ensembles étiquetés, nous laisserons tomber dorénavant l'indice $A$. Qui plus est, pour abréger nous écrirons $c_n$ au lieu de $c(n)$.

De plus, nous écrirons dorénavant $\nu(c_n)$ pour la classe d'équivalence de $(c_n)$ (alors que nous écrivions $\nu(A)$ pour la classe d'équivalence de $c_A(n)$).

Pour qu'une suite $(c_n)$ puisse représenter un ensemble étiqueté, il faut et il suffit qu'elle soit croissante sur une partie qualifiée. En effet, dans ce cas, on peut d'abord considérer la restriction de $(c_n)$ à cette partie qualifiée, puis la compléter pour obtenir une suite $(c'_n)$ croissante sur $\mathbb{N}$ et considérer que $(c_n)$ représente un ensemble étiqueté dont la suite des comptes jusqu'à $n$ est $(c'_n)$.

Mais on pourrait espérer que toute suite naturelle soit "presque" croissante ou "presque" constante ; autrement dit, que pour toute suite, il existe une partie qualifiée sur laquelle la suite soit croissante ou constante.

Cet espoir n'est pas ridicule. En effet, lorsqu'une partie est qualifiée, on peut toujours la partitionner en autant de parties que l'on veut ; si le nombre de ces parties est fini, on voit facilement qu'une et une seule d'entre elles est qualifiée. On peut recommencer ce processus autant de fois que l'on veut (un nombre fini bien sûr). Tout ultrafiltre contient donc des parties "aussi peu nombreuses que l'on veut" (en dépit du fait qu'elles ont même cardinal). Nous ne nous attarderons pas à préciser ce que l'on n'entend exactement par là, car il faudrait pour cela utiliser la théorie que nous sommes en train de construire... Retenons simplementqu'à toute partie qualifiée, nous pouvons retirer une partie infinie (et bien choisie) d'éléments.

Pourtant nous allons prouver qu'il existe des suites qui, pour un ultrafiltre donné, ne sont ni presque croissantes, ni presque constantes. Pour cela, nous allons construire une suite, puis prouver qu'il existe un ultrafiltre tel que cette suite n'est ni presque croissante, ni presque constante.

Considérons, par exemple, la suite $(c_n)$ représentée à la figure 3.

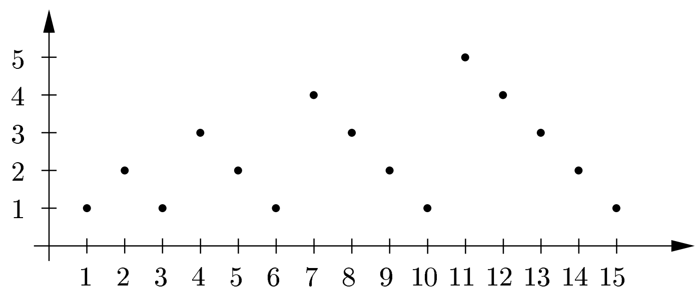



Figure 3

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas écrire $\mathbb{N}$ comme union finie de parties sur lesquelles la suite $(c_n)$ est croissante. En outre, le complémentaire d'une telle union est un ensemble infini.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathcal{E}$ des complémentaires $F^c$ des parties $F$ de $\mathbb{N}$ sur lesquelles $(c_n)$ est croissante. Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est non vide. En effet, si $F_1^c, F_2^c, \ldots, F_n^c$ appartiennent à $\mathcal{E}$, alors

$$F_1^c \cap F_2^c \cap \ldots \cap F_n^c = (F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n)^c$$

est infini, comme nous l'avons remarqué puisque $\mathbb{N}$ ne peut s'écrire comme union finie de parties $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sur lesquelles la suite $(c_n)$ est croissante.

Du deuxième théorème démontré dans l'Appendice, on peut déduire qu'il existe un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ incluant $\mathcal{E}$.

Puisque les complémentaires de parties sur lesquelles $(c_n)$ est croisssante appartiennent à $\mathcal{U}$, les parties elle-mêmes ne peuvent pas lui appartenir. Donc, pour l'ultrafiltre $\mathcal{U}$, la suite $(c_n)$ n'est pas croissante sur une partie qualifiée de $\mathbb{N}$.

Rien ne dit cependant qu'il existe des ultrafiltres incluant l'ensemble $\mathcal{E}$ apparaissant dans la démonstration ci-dessus et vérifiant les propriétés supplémentaires [Q5] et [Q6] des ultrafiltres. Néanmoins, on peut modifier la suite $(c_n)$ pour que cela soit possible.

Remarquons en outre que nous pourrions également trouver un ultrafiltre pour lequel la suite $(c_n)$ apparaissant dans la démonstration soit presque croissante ou presque constante. Il suffit, pour que cette suite soit presque constante par exemple, de considérer un ultrafiltre comprenant l'ensemble $\{1, 3, 6, 10, \ldots\}$ (des nombres triangulaires) ; un tel ultrafiltre existe (voir Appendice).

La proposition ci-dessus ne permet pas d'affirmer que pour tout ultrafiltre fixé, il existe une suite qui n'est ni presque croissante, ni presque constante. Néanmoins, nous savons que, pour certains ultrafiltres, il existe des suites qui ne représentent pas des ensembles étiquetés. Plus particulièrement, pour ces ultrafiltres, la différence de deux suites croissantes (représentant des ensembles étiquetés) ne représente pas toujours un ensemble étiqueté, d'où le fait que la proposition (6) ne soit pas vérifiée.

Poursuivons donc notre construction pour élargir la théorie aux suites quelconques. Nous allons montrer comment on peut définir des "hypernaturels" qui jouissent de toutes les propriétés souhaitables, y compris d'une soustraction $\nu(c_n) - \nu(c'_n)$ quand l'hypernaturel $\nu(c_n)$ sera plus grand ou égal à $\nu(c'_n)$.

### Remarque

Dans nos nouvelles notations, l'addition et la multiplication sont définies par

$$\nu(c_n) + \nu(c'_n) = \nu(c_n + c'_n)$$

et

$$\nu(c_n) \cdot \nu(c'_n) = \nu(c_n \cdot c'_n).$$

Elles apparaissent comme des fonctions de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ étendues à des fonctions de ${}^\bullet\mathbb{N}^2$ dans ${}^\bullet\mathbb{N}$, selon la formule générale

$$f(\nu(c_n), \nu(c'_n)) \quad = \quad \nu(f(c_n, c'_n)). \tag{7}$$

Nous pouvons appliquer cette définition à d'autres fonctions d'une, deux ou $n$ variables. Par exemple,

$$\mathrm{ent}\sqrt{\nu(c_n)} = \nu(\mathrm{ent}\sqrt{c_n}),$$

$$\nu(c_n)^{\nu(c'_n)} = \nu({c_n}^{c'_n}).$$

Cela nous permettra d'écrire, par exemple,

$$(2\omega_0)^2 = \nu((2n)^2) = \nu(4n^2) = 4{\omega_0}^2,$$

$$\mathrm{ent}\sqrt{{\omega_0}^2} = \nu(\mathrm{ent}\sqrt{n^2}) = \nu(\mathrm{ent}(n)) = \nu(n) = \omega_0.$$

# 5. Les hypernaturels

## 5.1. Numérosités et hypernaturels

Après avoir fixé un ultrafiltre, considérons toutes les suites naturelles et appliquons-leur la construction décrite dans les sections précédentes : définition de $\simeq$ et $\sqsubseteq$, classes d'équivalence, définition de l'ordre, de l'addition et de la multiplication.

La classe d'équivalence d'une suite $(c_n)$, notée $\nu(c_n)$, est appelée *hypernaturel.* L'ensemble des hypernaturels est noté ${}^*\mathbb{N}$.

Les classes de suites constantes sont identifiées aux constantes elles-mêmes et les classes de suites croissantes sur une partie qualifiée de $\mathbb{N}$ sont identifiées [7] aux classes de suites croissantes équivalentes (pour la relation $\simeq$). Cela nous permet d'écrire

$$\mathbb{N} \subset {}^\bullet\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}.$$

La définition (7) de l'extension d'une fonction de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ prend un sens

7. On peut redéfinir ${}^\bullet\mathbb{N}$ comme l'ensemble des classes de suites presque croissantes.

quelle que soit la fonction $f$ (par exemple, la soustraction) et on peut la généraliser aux fonctions de $n$ variables [8].

Les naturels et les numérosités sont donc des hypernaturels particuliers : ils peuvent être représentés par des suites constantes ou croissantes. Les autres hypernaturels, eux, peuvent être vus comme différences de deux numérosités, puisque toute suite de naturels est la différence de deux suites naturelles croissantes.

Remarquons que l'ensemble $^*\mathbb{N}$ (tout comme $^\bullet\mathbb{N}$) dépend de l'ultrafiltre que l'on a fixé : deux ultrafiltres différents donnent deux $^*\mathbb{N}$ différents. Néanmoins les différences entre ces deux $^*\mathbb{N}$ ne sont pas fondamentales dans le sens où ils sont isomorphes [9]. Signalons tout de même que la démonstration de cette affirmation est fondée sur l'hypothèse du continu [10]. Si les $^\bullet\mathbb{N}$ obtenus à partir d'ultrafiltres différents étaient également isomorphes, ce nous permettrait de conclure que, *pour tout* ultrafiltre, il existe un hypernaturel qui n'est pas une numérosité. Mais est-ce le cas ? La question reste ouverte.

## 5.2. Les hypernaturels infiniment grands

Par la construction décrite dans les sections précédentes, nous avons élargi l'ensemble $\mathbb{N}$ (des cardinaux d'ensembles finis) en l'ensemble $^\bullet\mathbb{N}$ (des numérosités), puis en l'ensemble $^*\mathbb{N}$ (des hypernaturels). L'ordre et les opérations sur $^*\mathbb{N}$ prolongent ceux sur $\mathbb{N}$. Mais quel lien y a-t-il entre les naturels, les numérosités et les autres éléments de $^*\mathbb{N}$ ? Où sont-ils "situés" les uns par rapport aux autres ?

Une réponse possible consiste à les ordonner : comme tout ensemble fini est moins nombreux que tout ensemble infini dénombrable, tous les naturels sont plus petits que toutes les autres numérosités. Plus généralement, tous les hypernaturels non naturels sont strictement plus grands que tous les naturels.

8. En fait, l'ensemble $^*\mathbb{N}$ forme un modèle de l'Arithmétique de Peano.
9. Voir par exemple [8].
10. A savoir qu'il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal est strictement supérieur au cardinal de $\mathbb{N}$ et strictement inférieur au cardinal de $\mathbb{R}$. L'hypothèse du continu est indépendante des axiomes de la théorie des ensembles ZF.

En effet, si $(c_n)$ est une suite de naturels qui n'est pas "presque" constante (c'est-à-dire qui n'est constante sur aucune partie qualifiée), alors, quel que soit le naturel $N$, les ensembles

$$\{n \in \mathbb{N} : c_n = N\}, \{n \in \mathbb{N} : c_n = N - 1\}, \dots, \{n \in \mathbb{N} : c_n = 0\}$$

ne sont pas qualifiés. Donc, leurs complémentaires le sont et l'intersection de tous leurs complémentaires, c'est-à-dire $\{n \in \mathbb{N} : c_n > N\}$ l'est aussi. On peut donc affirmer que $c_n > N$ pour presque tout $n$, d'où

$$\nu(c_n) > \nu(N) = N$$

quel que soit le naturel $N$.

Nous dirons que les hypernaturels plus grands que tous les naturels sont *infiniment grands.*

L'ensemble $^*\mathbb{N}$ contient maintenant assez d'éléments pour que la propriété suivante

*Si $a, b \in {}^*\mathbb{N}$ et sont tels que $a \leqslant b$, il existe $c \in {}^*\mathbb{N}$ tel que $a + c = b$*

soit vraie comme dans $\mathbb{N}$. Ce n'est pas la seule propriété qui se "transfère" [11] de $\mathbb{N}$ à $^*\mathbb{N}$. C'est aussi le cas de l'induction : l'énoncé

*Pour toute propriété $P$,*
*si $P(0)$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$ $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$*

se transfère dans $^*\mathbb{N}$ en

*Pour toute propriété $P$,*
*si $P(0)$ et si $\forall n \in {}^*\mathbb{N}$ $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$, alors $\forall n \in {}^*\mathbb{N}$ $P(n)$.*

C'est probablement une des propriétés les plus étonnantes de cet ensemble $^*\mathbb{N}$ : elle fait le lien entre les naturels et les hypernaturels infiniment grands. Pourtant, on peut voir facilement que si $\omega$ est un hypernaturel infiniment grand, $\omega - 1$ l'est aussi. Et si $a$ est un naturel, $a + 1$ l'est aussi. Nous pouvons alors nous demander où se situe la "frontière" entre l'ensemble $\mathbb{N}$ et l'ensemble $^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Il s'agit là d'une des difficultés des mathématiques dans lesquelles on utilise l'ensemble $^*\mathbb{N}$ et que l'on appelle l'*analyse non standard.* Nous ne développerons pas ses principes ici, mais on peut les lire

11. Sur le transfert des propriétés de $\mathbb{N}$ à $^*\mathbb{N}$, lire par exemple, [8].

par exemple dans [2], [6], [8], [9]. Disons quand même que l'analyse non standard utilise des notions telles qu' "infiniment petit" ou "infiniment proche". Nous en disons quelques mots à la section suivante.

# 6. Vers les hyperrationnels et les hyperréels

## 6.1. Les hyperrationnels

En utilisant la même méthode de construction que pour les hypernaturels, nous pouvons construire les *hyperentiers*, les *hyperrationnels* et les *hyperréels*.

Par exemple les *hyperrationnels* sont des classes de suites de rationnels, notés $\nu(q_n)$ et formant l'ensemble $^*\mathbb{Q}$.

Parmi les hyperrationnels, on peut trouver des *infiniment petits*, c'est-à-dire des hyperrationnels dont la valeur absolue est plus petite que tous les rationnels strictement positifs. Par exemple, si $q_n = 1/n$ pour tout naturel $n$, alors $\nu(q_n) < r$ pour tout rationnel $r$ strictement positif. En effet, l'ensemble des naturels $n$ pour lesquels $1/n < r$ est le complémentaire d'un ensemble fini, donc il est qualifié.

A partir de la notion d'infiniment petit, on définit celle d' "infiniment proche" de la façon suivante : étant donnés deux hyperrationnels $p$ et $q$, on dit que $p$ et $q$ sont *infiniment proches* si $| q - p |$ est infiniment petit.

## 6.2. Les numérosités, matériaux de construction des hyperrationnels

Arrêtons ici notre construction technique des hyperréels. Un point intéressant peut être noté pour conclure : même si, nous le savons, les numérosités ne remplissent pas tout $^*\mathbb{N}$, *elles peuvent servir à construire tous les "hypernombres"*.

Par exemple — nous l'avons montré — les hypernaturels peuvent être construits par soustraction de numérosités. Il en va de même des hyperentiers.

Ensuite, tout hyperrationnel positif est le quotient de deux numérosités : si $(q_n)$ est une suite de rationnels positifs, on peut trouver deux suites naturelles croissantes $(N_n)$ et $(D_n)$ telles que pour tout $n$

$$q_n = \frac{N_n}{D_n}.$$

En effet, considérons une suite $(q_n) = (\nu_n/\delta_n)$, où $(\nu_n)$ et $(\delta_n)$ sont deux suites de naturels. Nous pouvons définir les suites de naturels $(N_n)$ et $(D_n)$ par récurrence :

- ▶ tout d'abord

$$\begin{cases} N_0 &= \nu_0, \\ D_0 &= \delta_0; \end{cases}$$

- ▶ ensuite,

– si $q_{n+1} = q_n$, alors

$$\begin{cases} N_{n+1} &= N_n, \\ D_{n+1} &= D_n\ ; \end{cases}$$

– si $q_{n+1} > q_n$,

$$\begin{cases} D_{n+1} &= \text{le plus petit multiple de } \delta_{n+1} \text{ supérieur ou égal à } D_n, \\ N_{n+1} &= \dfrac{\nu_{n+1}}{\delta_{n+1}} \cdot D_{n+1} \end{cases}$$

– si $q_{n+1} < q_n$,

$$\begin{cases} N_{n+1} &= \text{le plus petit multiple de } \nu_{n+1} \text{ supérieur ou égal à } N_n, \\ D_{n+1} &= \dfrac{\delta_{n+1}}{\nu_{n+1}} \cdot N_{n+1}. \end{cases}$$

On peut vérifier que les suites $(N_n)$ et $(D_n)$ sont croissantes et que, pour tout $n$ naturel, $q_n = N_n/D_n$.

On peut donc voir les hyperrationnels comme des rapports de “nombres d'éléments” d'ensembles étiquetés, tout comme les rationnels sont des rap-

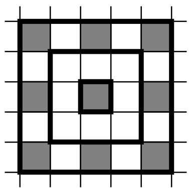


Figure 4

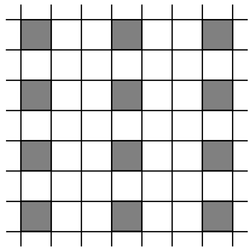


Figure 5

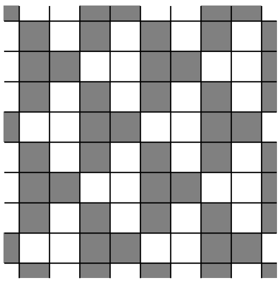


Figure 6

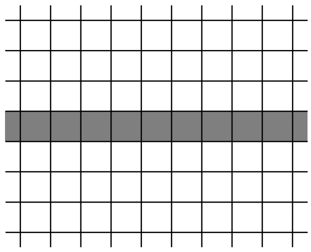


Figure 7

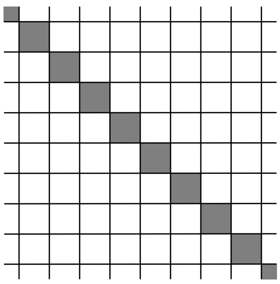


Figure 8

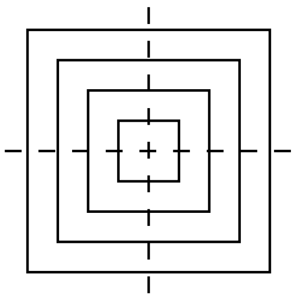


Figure 9

ports de nombres d'éléments d'ensembles finis. Par exemple,

$$\frac{\nu(\{1\})}{\nu(\mathbb{N})} = \frac{1}{\omega_0}$$

est un hyperrationnel infiniment petit et

$$\frac{\nu(\mathbb{N})}{\nu(\mathbb{N}_0)} = 1 + \frac{1}{\omega_0}$$

est un hyperrationnel infiniment proche de 1.

# 7. Numérosités et pavages

## 7.1. Pavages et découpages

Revenons maintenant au pavage de la section 1.2 dont nous n'avons pas encore reparlé. Comment peut-on utiliser la théorie développée dans cet article pour associer une numérosité à ce pavage?

Commençons par préciser le contexte. Nous considérons un quadrillage de carrés s'étendant sur tout le plan. Nous appellerons ces carrés des *cases*. Lorsque certaines cases du quadrillage sont noircies et ce d'une façon structurée et extensible à l'infini, nous parlerons de *pavage*. Le terme *découpage* sera utilisé pour désigner un ensemble de formes géométriques isométriques constituées de cases, s'étendant sur tout le plan sans lacune ni recouvrement.

Examinons quelques pavages et demandons-nous quels découpages nous pouvons considérer pour que la "proportion" de cases noires soit toujours celle qui semble être la plus naturelle.

Nous voudrions pouvoir dire que le pavage infini de la figure 1 comporte un quart de cases noires. Mais si nous découpons ce pavage en "couronnes carrées" comme sur la figure 4, la proportion de noirs dans une couronne n'est jamais $\frac{1}{4}$, mais est donnée par la suite $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \ldots$ Remarquons également que si nous considérons la proportion de cases noires sur les grands carrés emboîtés de la figure 4, nous ne trouvons jamais $\frac{1}{4}$ non plus, puisque ces carrés sont tous formés d'un nombre impair de cases.

D'autre part, pour le même pavage, si nous considérons le découpage de la figure 2 qui semble convenir, mais que nous déplaçons une case noire, la proportion d'un quart n'est plus forcément respectée sur chaque carré de quatre cases. Or nous voudrions dire que le "nombre" de cases noires ne change pas si l'on déplace un nombre fini de cases noires.

Précisons encore ce que nous aimerions avoir. Pour cela notons $N^2$ le "nombre total" de cases du quadrillage de départ, ou plutôt la *numérosité* du pavage entièrement noir. Nous voudrions que

- la numérosité du pavage de la figure 1 soit donc $N^2/4$, même si l'on déplace un nombre fini de cases noires, et $N^2/4+1$ si on noircit une case supplémentaire ;
- la numérosité du pavage de la figure 5 soit $N^2/6$ ;
- la numérosité du pavage de la figure 6 soit $N^2/2$ ;
- la numérosité des pavages des figures 7 et 8 soit $N$.

Pour les pavages des figures 1, 5 et 6, nous pouvons nous contenter de considérer les découpages en rectangles isométriques. Néanmoins, nous ne pouvons pas fixer un *découpage rectangulaire* une fois pour toutes. En effet, si c'était le cas, lequel devrions-nous choisir ? Celui de la figure 2 ? Mais alors il ne conviendra pas pour le pavage de la figure 5, ni même pour celui de la figure 1 si nous déplaçons une case noire.

C'est un peu comme pour les ensembles étiquetés : on ne considère pas les mêmes ensembles qualifiés pour déterminer la numérosité de l'ensemble $A = 3\mathbb{N}_0$ (qui est $\omega_0/3$) et celle de l'ensemble $B$ des carrés non nuls (qui est $\sqrt{\omega_0}$). De plus, lorsque l'on change un élément de "boîte" dans le cas des ensembles étiquetés, la numérosité ne change pas, car les comptes jusqu'à $n$ pour les "premiers" $n$ d'un ensemble qualifié ne comptent pas beaucoup dans la détermination de la numérosité, au sens où on peut retirer un nombre fini d'éléments d'un ensemble qualifié sans changer sa "qualification". C'est donc l'évolution des comptes jusqu'à $n$ lorsque les $n$ deviennent de plus en plus grands qui est significative.

Pour obtenir la même propriété d'invariance de la numérosité par rapport au déplacement d'une case noire, il faudra également considérer des rectangles de plus en plus grands plutôt que les rectangles isométriques constituant un découpage.

## 7.2. Numérosités de pavages : une solution

Voici une façon d'adapter la théorie des numérosités aux pavages.

Le quadrillage considéré peut s'apparenter à $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$. Il faut pour cela déterminer une origine au quadrillage. Un pavage peut alors être vu comme une partie de $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ (seuls les couples correspondant à des cases noires sont comptés). Or nous connaissons les numérosités de $\mathbb{Z}_0$ (à savoir $2\omega_0$) et de $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (à savoir ${\omega_0}^2$). Il est naturel de déterminer celle de $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ ou d'une de ses parties en prenant l'étiquetage qui à chaque élément $(a, b)$ de $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ associe l'étiquette $\max(|a|, |b|)$. Il suffira alors de faire les comptes jusqu'à $n$ des éléments de la partie considérée ce qui, au niveau des pavages, revient à compter les cases noires dans les grands carrés emboîtés représentés à la figure 9.

Par ce procédé, nous obtenons que la numérosité du pavage dont toutes les cases sont noircies (assimilé à $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$) est $(2\omega_0)^2$. Le $N$ cité plus haut vaut donc $2\omega_0$. On peut vérifier que les pavages des figures 1, 5, 6 et 7 ont bien la numérosité souhaitée (même si l'on déplace un nombre fini de cases noires). Voici sur quels ensembles qualifiés on peut considérer les comptes jusqu'à $n$ :

- pour le pavage de la figure 1, sur l'ensemble $2\mathbb{N}$ ;
- pour celui de la figure 5, sur l'ensemble $6\mathbb{N}$ ;
- pour celui de la figure 6, sur l'ensemble $4\mathbb{N}$ ;
- pour celui de la figure 7, sur l'ensemble $\mathbb{N}$.

D'une façon générale, si la numérosité d'un pavage peut être déterminée intuitivement en considérant des rectangles de dimension $a \times b$, il suffira de regarder les comptes jusqu'à $n$ sur l'ensemble qualifié

$$\{\mathrm{ppcm}(a, b) \cdot k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

où $\mathrm{ppcm}(a, b)$ est le plus petit multiple commun de $a$ et $b$.

On voit pourquoi nous avons choisi d'assimiler le quadrillage de départ à $\mathbb{Z}_0 \times \mathbb{Z}_0$ plutôt qu'à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ : le choix de ce dernier ensemble donnerait lieu au compte des cases noires sur les carrés emboîtés de la figure 4.

Remarquons que pour la figure 8, le choix de l'origine n'est pas indifférent : la numérosité de ce pavage est $2(\omega_0 - a)$, c'est-à-dire $N - 2a$, où $a$ est un naturel qui varie en fonction de la position de l'origine. La numérosité d'un pavage n'est donc pas toujours indépendante de la position de l'origine. Ce n'est pas tellement étonnant si l'on pense que cette position détermine l'étiquetage du quadrillage, qui lui-même détermine la numérosité des différents pavages.

Il en est de même pour tous les ensembles dénombrables considérés jusqu'à présent. Par exemple, la numérosité de $\mathbb{N}_0$ serait $\omega_0 - 3$ si on avait choisi l'étiquetage qui, à un naturel quelconque $n$ associe le nombre $n+3$ (ce qui reviendrait en quelque sorte à déplacer l'origine de l'étiquetage).

# Appendice sur les ultrafiltres

▶ Démontrons tout d'abord le théorème suivant :

*Il existe un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ contenant les parties suivantes :*

$$A_k = \{kn \mid n \in \mathbb{N}\},$$
$$B_l = \{n^l \mid n \in \mathbb{N}\},$$

*pour tous les naturels non nuls $k$ et $l$.*

Preuve. — **1°** Les ensembles $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ et $\{B_l \mid l \in \mathbb{N}_0\}$ sont tous deux fermés pour l'intersection finie. En effet, soient $k$ et $k' \in \mathbb{N}_0$. On a

$$A_k \cap A_{k'} = A_{\mathrm{ppcm}(k,k')}$$
$$B_k \cap B_{k'} = B_{\mathrm{ppcm}(k,k')}$$

où $\mathrm{ppcm}(k,k')$ est le plus petit multiple commun de $k$ et $k'$.

**2°** Toute intersection finie de parties du type $A_k$ et $B_l$ est infinie. En effet, soit

$$A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_n} \cap B_{l_1} \cap \ldots \cap B_{l_m}$$

une telle intersection. Grâce au 1°, il existe deux naturels $k$ et $l$ tels que cette intersection soit égale à $A_k \cap B_l$. Enfin ce dernier ensemble inclut l'ensemble infini

$$\{(kn)^l \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**3°** Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des surensembles [12] des intersections finies de parties du type $A_k$ et $B_l$. On a les propriétés suivantes :

– $\varnothing \notin \mathcal{F}$ par le 2°.

– *$\mathcal{F}$ est fermé pour l'intersection* : une intersection finie de surensembles d'intersections finies est un surensemble d'intersections finies.

– *Tout surensemble d'un élément de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.*

Parce que $\mathcal{F}$ vérifie ces trois propriétés, on dit que $\mathcal{F}$ est un *filtre* sur $\mathbb{N}$. De plus, comme tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont infinis, nous dirons que $\mathcal{F}$ est un filtre *non principal*.

– *Il existe un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$ incluant $\mathcal{F}$.* En effet, soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des filtres non principaux sur $\mathbb{N}$ contenant $\mathcal{F}$. On a $\mathbb{F} \neq \varnothing$ et $\mathbb{F}$ peut être *ordonné* par l'inclusion. De plus, $\mathbb{F}$ est *inductif*, car toute partie totalement ordonnée de $\mathbb{F}$ est majorée (par l'union des composants).

Par le lemme de Zorn, $\mathbb{F}$ possède un *élément maximal* $\mathcal{U}$. Cela veut dire que $\mathcal{U} \in \mathbb{F}$ et que tout élément de $\mathbb{F}$ incluant $\mathcal{U}$ est égal à $\mathcal{U}$.

Montrons que $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre. Si tel n'était pas le cas, il existerait un $S \neq \varnothing$ tel que

$$S \notin \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \mathbb{N} \setminus \mathcal{S} \notin \mathcal{U}.$$

Alors, par la propriété [Q2″] des filtres (puisque $\mathcal{U}$ est un filtre), les ensembles $T$ de $\mathcal{U}$ ne peuvent être inclus ni dans $S$, ni dans $\mathbb{N} \setminus S$, et ont donc une intersection non vide tant avec $S$ qu'avec $N \setminus S$. On peut alors voir tous les éléments de $\mathcal{U}$ comme des surensembles des $S \cap T$, $T$ variant dans $\mathcal{U}$.

Notons $\mathcal{U}'$ l'ensemble des surensembles des $S \cap T$, $T$ variant dans $\mathcal{U}$. Alors

(a) $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ ;

(b) $\mathcal{U}'$ est un filtre. En effet, soient $U_1'$ et $U_2'$ deux éléments de $\mathcal{U}'$ ; il existe

12. Un *surensemble* d'un ensemble donné est un ensemble qui inclut celui-ci.

$T_1$ et $T_2$ dans $\mathcal{U}$ tels que

$$U'_1 \supset S \cap T_1 \text{ et } U'_2 \supset S \cap T_1.$$

On a alors

$$U'_1 \cap U'_2 \supset S \cap T_1 \cap S \cap T_2 = S \cap (T_1 \cap T_2)$$

et comme $T_1 \cap T_2$ appartient à $\mathcal{U}$, $U'_1 \cap U'_2 \in \mathcal{U}'$.

Les deux autres propriétés d'un filtre se démontrent sans peine.

(c) $S \in \mathcal{U}'$ puisque $S$ est un surensemble de $S \cap T$.

Nous avons donc montré l'existence d'un ensemble $S$ qui appartient à $\mathcal{U}'$ sans appartenir à $\mathcal{U}$, ce qui contredit le caractère maximal de $\mathcal{U}$.

Ainsi, $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre. En outre, puisqu'il appartient à $\mathbb{F}$, il est non principal. □

► Nous pouvons généraliser le théorème précédent de la manière suivante :

*Soit un ensemble $\mathcal{P}$ de parties de $\mathbb{N}$ tel que toute intersection finie de ces parties soit infinie. Il existe un ultrafiltre non principal incluant $\mathcal{P}$.*

PREUVE. — Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les surensembles d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{P}$. On peut voir que $\mathcal{F}$ est un filtre non principal. En utilisant les mêmes arguments que dans le paragraphe précédent, on prouve qu'il existe un ultrafiltre non principal incluant $\mathcal{P}$. □

► Commentons l'intérêt de ce théorème. Si à l'aide des propriétés déjà imposées à un ultrafiltre $\mathcal{U}$, on ne peut déduire ni l'appartenance, ni la non-appartenance à $\mathcal{U}$ d'une partie $P$ donnée, c'est-à-dire si $P$ n'est pas un surensemble d'intersection finie de parties qualifiées (par les propriétés imposées) et si $P$ a une intersection non vide avec chaque partie qualifiée, alors on peut imposer que $P$ appartienne à l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

## Références

[1] V. Benci. *I numeri e gli insiemi etichettati.* Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari, Vol. 261, 1995.

[2] M. Boffa et A. Pétry. Des naturels non standard à l'Analyse non standard, une introduction. *Mathématique et Pédagogie*, Vol. 94, pp. 39–54, 1993.

[3] Euclide. *Euclid's Elements*, trad. and comm. T.L. Heath. Dover, New York, 1956. 3 vol.

[4] Galileo Galilei. *Dialogues concerning two new sciences*, trad. H. Crew and A. de Salvio. Dover, 1954.

[5] C. Hauchart et N. Rouche. *Apprivoiser l'infini.* CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987.

[6] H. J. Keisler. *Elementary Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.

[7] I. Lakatos. *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, trad. N. Balacheff et J.-M. Laborde. Hermann, Paris, 1984.

[8] T. Linstrøm. An invitation to nonstandard analysis. In N. Cutland, editor, *Nonstandard analysis and its applications*, pp. 1–105. Cambridge University Press, 1988.

[9] A. Robert. *Analyse non standard.* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

Université catholique de Louvain
Département de mathématique
Chemin du cyclotron 2
1348 Louvain-la-Neuve
Belgique
e-mail : gilbert@amm.ucl.ac.be
rouche@amm.ucl.ac.be