

Points (presque) fixes

Roland Hinnion

(Université Libre de Bruxelles)

1. Introduction

Le célèbre théorème de Brouwer, appelé par la suite “théorème du point fixe”, fut énoncé dans l'article de Brouwer : *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen* **71**, pp. 1911–1912. Cet article contient d'ailleurs aussi des aspects de la théorie du degré, ainsi que le “Hairy Ball Theorem”. Voici un énoncé du théorème du point fixe :

Toute fonction continue d'un compact convexe de \mathbb{R}^n dans lui-même admet un point fixe.

Mathématiquement :

*Si $f : K \rightarrow K$ est continue et $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact et convexe
Alors $\exists x \in K$ $f(x) = x$.*

En 1951, Brouwer montre que ce théorème est faux en intuitionisme, dans *An intuitionist correction of the fixed-point theorem on the sphere*. A ce moment, il était déjà connu que le théorème de Bolzano-Weierstrass est faux en intuitionisme. (Rappelons un énoncé de ce théorème : *tout ensemble infini borné de \mathbb{R}^n admet un point d'accumulation.*) Ces deux théorèmes (Brouwer et Bolzano-Weierstrass) sont faux aussi en constructivisme (on peut consulter à cet effet le *Handbook* de Troelstra).

Il existe une liste impressionnante de preuves (en logique classique !) du théorème de Brouwer. On pourrait les classer en deux catégories : les preuves “totalement non constructives” et les preuves “quasi constructives”, étant bien entendu que des preuves vraiment constructives, au sens de l'intuitionisme ou du constructivisme, n'existent pas puisque dans ce contexte le théorème est faux. Les preuves quasi constructives montrent que le théorème de Brouwer

est obtenu à partir de ce que l'on pourrait appeler le "théorème du point presque fixe" — dont l'énoncé est :

*Si $f : K \rightarrow K$ est continu et $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact convexe,
Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in K \|f(x) - x\| < \varepsilon$*

et une utilisation adéquate du théorème de Bolzano-Weierstrass.

En fait, le théorème du point presque fixe est vrai en intuitionisme et en constructivisme. On peut même en donner une version finitiste. Il est compréhensible dès lors que le théorème de Brouwer perde sa validité lorsque le principe de Bolzano-Weierstrass vient à disparaître.

Avant d'aborder l'examen de certaines preuves du théorème de Brouwer, deux remarques s'imposent :

1. Au cours du temps, les preuves se sont considérablement simplifiées grâce à une clarification des notions qui sont réellement en jeu; certaines preuves, par exemple, ne demandent plus qu'une connaissance élémentaire de l'analyse.
2. Les preuves quasi constructives ont fourni des algorithmes efficaces pour la recherche de points presque fixes; la recherche en vue d'améliorer encore ces méthodes est intense (en particulier chez les économistes).

2. Preuves totalement non-constructives

Ce type de preuve se fait dans le cadre d'une (grosse) théorie générale (géométrie différentielle, homologie, théorie du degré, ...) ou, dans certains cas, en analyse élémentaire. Ces preuves ne fournissent aucune indication quant à un éventuel algorithme permettant de déterminer effectivement un point fixe, ou au moins un point presque fixe. Il est impossible de les passer toutes en revue ici, mais la petite sélection qui suit donnera une idée des divers "styles" existant.

2.1. Preuves en analyse élémentaire

Certaines preuves sont liées au théorème de non-rétraction dont voici l'énoncé (dans la version C^k) :

Il n'existe pas de rétraction de classe C^k .

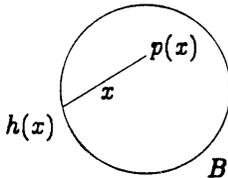
Rappelons que :

- Si $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ est la "boule unité", si $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ est la "sphère unité", on appelle **rétraction** une fonction $f : B \rightarrow S$ telle que $\forall x \in S f(x) = x$; il s'agit donc d'une application de la boule unité sur son bord (la sphère) ayant la propriété de fixer ce bord.
- Une fonction est de classe C^k si ses dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre k inclus.

Il est clair que si $k \geq k'$, le théorème de non-rétraction version $C^{k'}$ implique la version C^k . La version la plus forte est donc celle où $k = 0$.

On montre aisément que la version C^∞ implique le théorème de Brouwer; voici le schéma de cette preuve :

Soit f continue : $B \rightarrow B$. Si f n'admet pas de point fixe, alors : $\forall x \in B f(x) \neq x$. Donc $\forall x \in B \exists \varepsilon > 0 \|f(x) - x\| > \varepsilon$. Comme B est compact, on vérifie que l'on a en fait : $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in B \|f(x) - x\| > \varepsilon$ (ε uniforme). Le théorème d'approximation de Weierstrass permet d'affirmer qu'il existe un polynôme $p(x)$ tel que $\forall x \in B \|p(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$. On constate que p n'a pas de point fixe et est une fonction $C^\infty : B \rightarrow B$. Il est alors facile de définir une rétraction C^∞ notée h :



$h(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{l'intersection de } S \text{ et de la droite reliant } p(x) \text{ à } x.$

Toute preuve d'une version C^k ($k \geq 0$) du théorème de non-rétraction fournit donc une preuve du théorème de Brouwer. En voici quelques exemples :

1. La non-rétraction C^2 est prouvée dans Dunford et Schwarz (1958) [1]. Cette preuve est simplifiée dans un article de Kannai (1979) [2]. L'idée

de ces preuves est la suivante :

On considère $V_t = \int_B |J_{f_t}(x)| dx$ (formule classique)

où :

- V_t est le volume de l'image de B par la fonction f_t ;
- f_t est la famille de fonctions définie par $f_t(x) = x + t(h(x) - x)$;
- h est une rétraction de classe C^2 (la preuve se fait par l'absurde);
- J_{f_t} est la jacobienne de f_t , c'est-à-dire la matrice des dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f_t ;
- $|A|$ désigne le déterminant de la matrice A .

On remarque que pour $t = 0$, $f_t(x) = x$ et donc f_0 est simplement l'identité. Pour $t = 1$, f_t est exactement h . La famille f_t permet donc de passer continûment de l'identité à la rétraction h . Or on peut démontrer que V_t est constant pour $t \in [0, 1]$. Ceci est absurde, puisque V_0 est le volume de B ($\neq 0$) et V_1 est le volume de S ($= 0$). La preuve nécessite le théorème de Jacobi où interviennent des dérivées secondes mixtes pour lesquelles on a besoin de l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i};$$

celle-ci s'obtient par l'hypothèse : h est de classe C^2 .

2. Dans un article de 1980, Rogers prouve la non-rétraction C^0 , en se basant sur une idée originale de Milnor (voir [3]).

D'abord, il prouve que les versions C^0 et C^1 de la non-rétraction sont équivalentes (preuve purement technique où on applique habilement le théorème d'approximation de Weierstrass); puis, il prouve la non-rétraction de la manière suivante :

Soit h une rétraction C^1 . On définit : $g(x) = h(x) - x$, qui est C^1 sur B compact et convexe. On montre que dans ce cas g satisfait sur B une condition de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\exists M \forall x, y \in B \quad \|g(x) - g(y)\| \leq M \|x - y\|.$$

Dès lors, si la famille $h_t(x)$ est définie par $h_t(x) \equiv x + tg(x)$, on voit facilement que $h_t(x) = h_t(y)$ implique $\|x - y\| \leq M |t| \|x - y\|$.

Pour $0 < t < \frac{1}{M}$, on aura : $h_t(x) = h_t(y) \implies x = y$, c'est-à-dire h_t est injective. (Cette propriété d'injectivité de h_t pour t assez petit, est le fondement de la preuve de Milnor.)

De plus,

$$\begin{aligned} |J_{h_t}| &= |I + tJ_g| \\ &= 1 + \alpha.t + \beta.t^2 + \dots \end{aligned}$$

(où I est la matrice identité $n \times n$, J_g la jacobienne de g , J_{h_t} la jacobienne de h_t).

Pour t assez petit, $|J_{h_t}|$ est donc $\neq 0$, ce qui entraîne, par application du théorème de la fonction réciproque, que la fonction h_t est ouverte (c'est-à-dire que l'image d'un ouvert est un ouvert). L'image de B (ouvert compact dans B) par h_t (fonction ouverte et continue) est donc un ouvert compact dans B , c'est-à-dire est B lui-même. Ceci montre que pour t assez petit, h_t est une surjection $B \rightarrow B$.

Conclusion : pour t assez petit, h_t est une bijection $B \rightarrow B$. Il en résulte que $V_t = \int_B |J_{h_t}| dx$ est constant sur un intervalle $0 < t < \epsilon$.

Ceci est impossible car V_t est l'intégrale d'un polynôme et est donc un polynôme. Or un polynôme constant sur un intervalle $]0, \epsilon[$ est constant partout, ce qui est absurde puisque $V_0 \neq 0$ et $V_1 = 0$.

2.2. Preuves dans le cadre d'une (grosse) théorie générale

Un autre type de preuve fait intervenir le "Hairy Ball Theorem", dont on peut montrer qu'il implique le théorème de Brouwer. Un exemple original de preuve simple du Hairy Ball Theorem est fourni par Milnor dans un article de 1978 [4]. Rappelons que ce théorème se trouve déjà dans l'article de Brouwer de 1911.

1. En géométrie différentielle, le Hairy Ball Theorem et le théorème de non-rétraction sont de simples corollaires de théorèmes plus généraux.
2. Dans la théorie de l'homologie, le théorème de Brouwer est un corollaire du théorème de Lefschetz; il est également un corollaire immédiat dans la théorie du degré.

(Ces aspects sont examinés avec soin dans un mémoire récent [5].)

3. Preuves quasi-constructives

Ces preuves fournissent un algorithme pour la recherche de points presque fixes, c'est-à-dire un algorithme résolvant le problème:

Etant donné \mathcal{E} , fournir une suite x_n convergeant vers un point x qui est \mathcal{E} -fixe (tel que $\|f(x) - x\| < \mathcal{E}$).

Montrons d'abord comment le théorème du point presque fixe implique le théorème du point (vraiment) fixe.

Supposons donc que $\forall \mathcal{E} \exists x \in K \|f(x) - x\| < \mathcal{E}$ (où K est compact convexe et f continue $K \rightarrow K$). On choisit une suite x_n telle que

$$\|f(x_n) - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Par Bolzano-Weierstrass, on sait que cette suite admet une sous-suite x_{n_k} convergeant vers un point \bar{x} de K . En passant à la limite ($k \rightarrow \infty$) dans

$$0 \leq \|f(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{n_k}$$

on obtient : $0 \leq \|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leq 0$, c'est-à-dire $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Cette utilisation de Bolzano-Weierstrass est évidemment l'étape non constructive (ce qui explique qu'en intuitionisme et constructivisme on ait le théorème du point presque fixe, mais pas le théorème du point fixe).

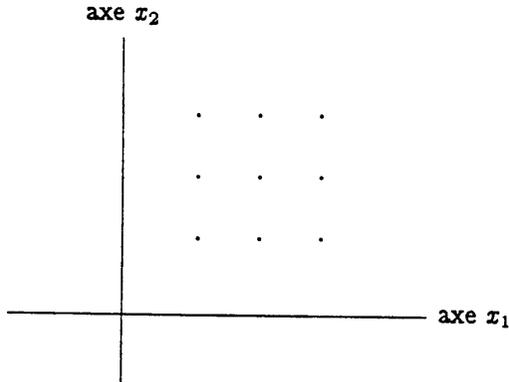
Avant d'aborder les algorithmes pour la recherche d'un point \mathcal{E} -fixe, il est intéressant de mentionner une version finie du théorème du point presque fixe, dont on peut facilement déduire le théorème de Brouwer (en logique classique, et toujours en se servant de Bolzano-Weierstrass). Pour la clarté de l'exposé nous considérons le cas de dimension 2, le résultat étant généralisable à toute dimension n .

3.1. Théorème finitiste du point presque fixe (version \mathbb{R}^2)

Soit A un réseau fini dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire un ensemble de type

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \forall i \in \{1, 2\} \quad 1 \leq x_i \leq k\}$$

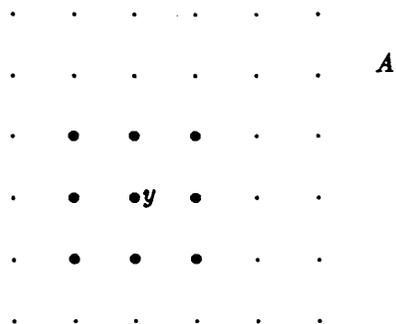
k est la "taille" du réseau; \mathbb{N} est l'ensemble des naturels. Voici par exemple un réseau de taille 3 :



Un point x (de A) est **voisin** de y (de A) (notation : $x \mathcal{V} y$) si

$$\max_i |x_i - y_i| \leq 1.$$

En clair, les voisins de y dans le dessin suivant sont les \bullet :



Une fonction $f : A \rightarrow A$ est dite **continue** si elle respecte la relation de voisinage, c'est-à-dire si

$$\forall x, y \in A (x \mathcal{V} y \implies f(x) \mathcal{V} f(y))$$

Etant donné les définitions qui précèdent, on peut énoncer le théorème du point presque fixe suivant :

Théorème (N. Nizette, [6])

Toute fonction continue f d'un réseau A fini dans A admet un point presque fixe (c'est-à-dire $\exists x \in A \ x \mathcal{V} f(x)$)

Démonstration

La fonction continue $f : A \rightarrow A$ permet de construire un champ de "flèches" sur A .

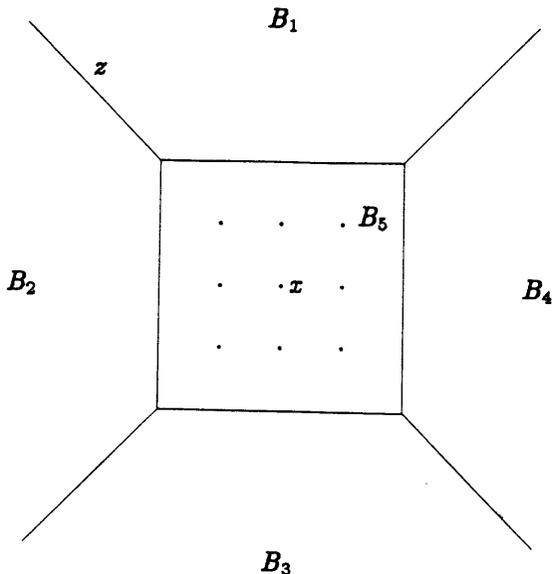
Il y aura 5 types de flèches :

- type I : \uparrow (vers le haut),
- type II : \leftarrow (à gauche),
- type III : \downarrow (vers le bas),
- type IV : \rightarrow (à droite),
- type V : \cdot (fleche nulle).

L'attribution de flèches se fait par le principe suivant :

- type I en x si $f(x) \in B_1$,
- type II en x si $f(x) \in B_2$,
- type III en x si $f(x) \in B_3$,
- type IV en x si $f(x) \in B_4$,
- type V en x si $f(x) \in B_5 =$ le voisinage de x ,

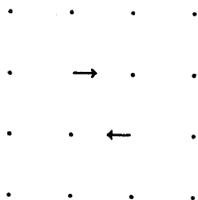
où B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 sont les zones définies par :



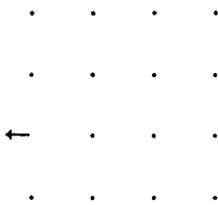
Cette attribution n'est pas univoque puisque, par exemple, les zones B_1 et B_2 se recourent (par exemple en z). Pour le cas où $f(x) \in B_1 \cap B_2$ on choisit l'un des types de flèches I ou II.

Remarquons qu'un point est presque fixe ssi il est muni de la flèche nulle (type V).

Comme f est continue, il est clair que le champ de flèches présente la particularité d'exclure le cas où deux points voisins seraient affectés de flèches opposées. On n'a par exemple jamais :



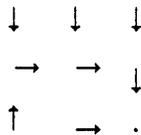
Une autre particularité, due au fait que f est une fonction $A \rightarrow A$, est qu'il n'y aura jamais, au bord de A , de flèche "sortante". La situation suivante est exclue (par exemple) :



A de taille 4

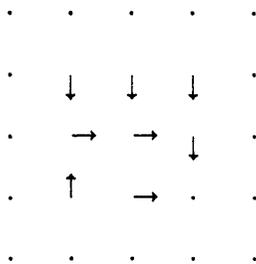
On peut dès lors ajouter à *A* un bord "artificiel" que l'on munira de flèches "rentrantes", sans contrevenir à la règle disant que deux points voisins ne sont jamais munis de flèches opposées, et sans introduire de nouveaux points presque fixes : on obtient ainsi un réseau fini *A'*, contenant *A*, de taille $k + 2$ (si la taille de *A* est k), et dont les points presque fixes sont tous dans *A*.

Exemple :

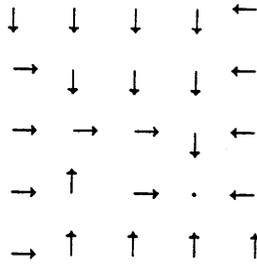


A de taille 3

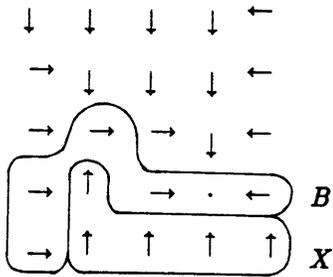
On passe à *A'* de taille 4 :



que l'on munit (au bord) de flèches "rentrantes" (il faut remarquer qu'à chaque "coin" on a le choix entre 2 types de flèches) :



Considérons maintenant X = la partie connexe maximale de A' , rencontrant le bord inférieur de A' et dont tous les points sont munis d'une flèche de type I :



Rappelons qu'un sous-ensemble X d'un réseau est dit **connexe** si deux points quelconques de X sont toujours reliés par un chemin situé dans X , un chemin de P à P' étant une suite finie de points P_0, \dots, P_n telle que $P = P_0, P_n = P'$ et $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} P_{i-1} \vee P_i$.

Le bord de X (dans A) est un certain chemin B ; deux points voisins du réseau n'étant jamais munis de flèches opposées et X étant muni uniquement de flèches de type I, il est clair que tous les points de B sont munis de flèches II, IV ou V.

Comme une extrémité de B porte une flèche de type II et l'autre une flèche de type IV, il y a nécessairement dans B une flèche nulle (cf la définition d'un chemin), donc un point presque fixe.

La généralisation de cette preuve se fait par induction sur la dimension n de l'espace \mathbb{R}^n contenant le réseau. Examinons brièvement le passage de \mathbb{R}^2 à \mathbb{R}^3 : comme précédemment, on munit le réseau (cubique) A d'un champ de flèches (6 types de "vraies" flèches et une flèche nulle). On ajoute un bord artificiel avec flèches pointant vers l'intérieur et on obtient A' . La partie maximale connexe X rencontrant un bord de A' et dont les flèches sont toutes de même type possède elle-même un bord B qui est une "surface" se comportant comme un réseau carré dans \mathbb{R}^2 (comme le A' dans la preuve ci-dessus). Par hypothèse d'induction, il y a donc un point presque fixe dans B .

3.2. Preuves combinatoires du théorème de Brouwer et algorithmes pour la recherche d'un point \mathcal{E} -fixe

Les premières preuves combinatoires du théorème de Brouwer sont basées sur le lemme de Sperner (1928) et le théorème de Kuratowski-Knaster-Mazurkiewicz (1929). La preuve initiale du lemme de Sperner était non constructive, mais dès 1967 une preuve constructive a été fournie par Cohen [6]. Les techniques simpliciales pour la recherche de points presque fixes se sont développées et améliorées depuis, avec Scarf (1967), Kuhn (1968), et d'autres.

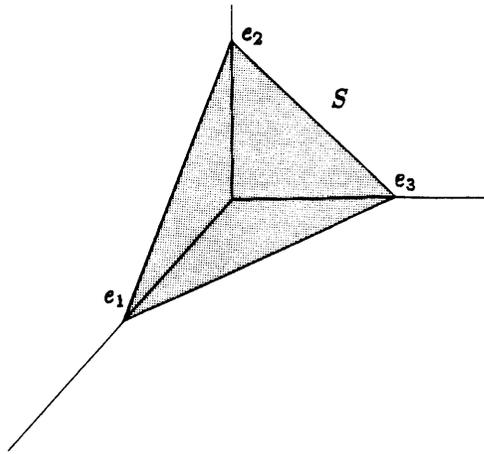
Rappelons d'abord quelques notions indispensables.

Si s_1, s_2, \dots, s_{n+1} sont des points (vecteurs) indépendants dans \mathbb{R}^{n+1} , la fermeture convexe S de $\{s_1, \dots, s_{n+1}\}$ s'appelle un **simplexe** (de dimension n). Notation :

$$\begin{aligned} S &= \text{conv} \{s_1, \dots, s_{n+1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \alpha_i (x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i s_i \text{ et } \forall i \ 0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1)\} \end{aligned}$$

Si $x \in S$ et $x = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_{n+1} s_{n+1}$, les nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ sont les coordonnées barycentriques de x .

Exemple : dans \mathbb{R}^3 , $S = \text{conv} \{e_1, e_2, e_3\}$ où e_1, e_2, e_3 est la base standard de \mathbb{R}^3 .

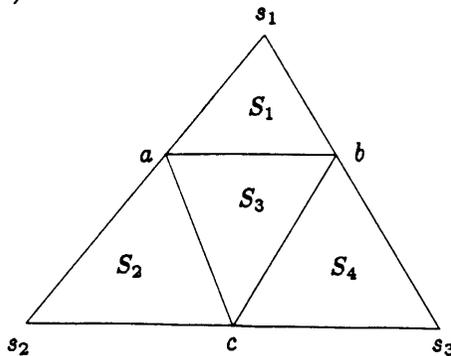


(Dans ce cas, les coordonnées barycentriques sont exactement les coordonnées cartésiennes.)

Par définition, une **face** de dimension k ($\leq n$) est un sous-simplexe de S , de la forme $\text{conv} \{s_{i_1}, \dots, s_{i_{k+1}}\}$. Une **triangulation** de S est un ensemble de simplexes contenus dans S tel que :

1. ces simplexes ont même dimension que S ,
2. leur intersection 2 à 2 est soit vide, soit une face commune aux deux (de dimension $n - 1$),
3. la réunion donne S .

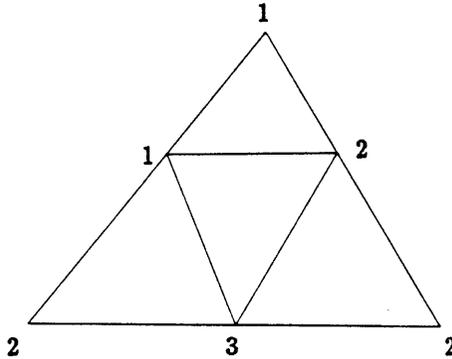
Exemple ($\dim S = 2$) :



$S = \text{conv} \{s_1, s_2, s_3\}$, et la triangulation est $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Une **indexation** d'une triangulation d'un simplexe $S = \text{conv} \{s_1, \dots, s_{n+1}\}$ de dimension n est une fonction $L : T \rightarrow \{1, 2, \dots, n+1\}$, où T est l'ensemble des sommets des simplexes de la triangulation (dans l'exemple ci-dessus, $T = \{s_1, s_2, s_3, a, b, c\}$).

Exemple d'indexation :

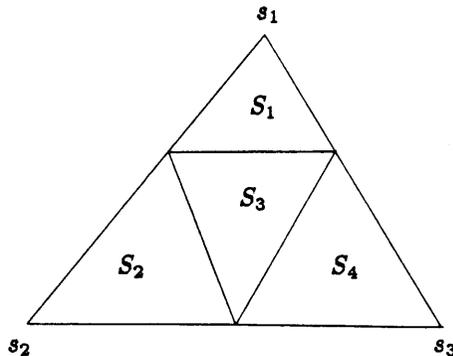


Une indexation L est dite **propre** si

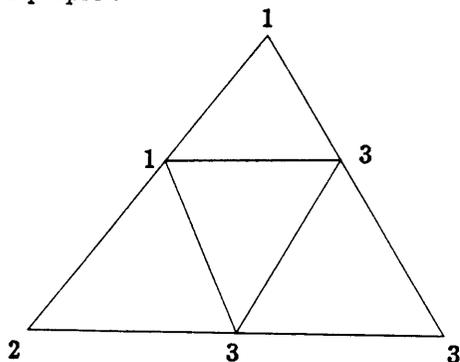
1. $\forall i \ L(s_i) = i$
2. $x \in \text{conv} \{s_{i_0}, \dots, s_{i_m}\} \implies L(x) \in \{i_0, \dots, i_m\}$

Un simplexe d'une triangulation est dit **complet** (par rapport à une indexation L) si $\{L(x) \mid x \text{ est un sommet de } \sigma\} = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

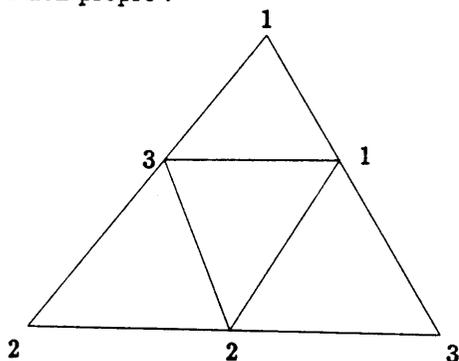
Exemples :



Voici une indexation propre :



Voici une indexation non-propre :



Pour cette dernière indexation, S_3 est complet, S_2 n'est pas complet.

Le lemme de Sperner peut maintenant s'énoncer :

Le nombre de simplexes complets dans une indexation propre d'une triangulation d'un simplexe est toujours impair (et donc différent de zéro !).

3.2.1. Quelques algorithmes pour la recherche de points presque fixes

Nous allons examiner ici en quoi la recherche de simplexes complets est liée à la recherche de points presque fixes d'une application continue $f : S \rightarrow S$.

3.2.2. Algorithme de Scarf

Soit F continue $S \rightarrow S$ et T l'ensemble des sommets d'une triangulation. Scarf propose une indexation (non propre!) dite **croissante** : pour $x \in T$,

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i s_i \quad (\text{où } s_1, \dots, s_{n+1} \text{ sont les sommets de } S \text{ et } x_i \text{ les coordonnées}$$

barycentriques), on a $f(x) \in S$ car $f : S \rightarrow S$, et donc $f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i s_i$ (avec

$$0 \leq \alpha_i \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1).$$

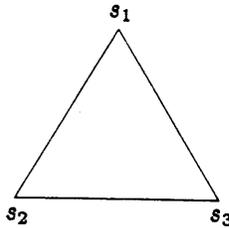
Notons $f_i(x) \equiv \alpha_i$. L'indexation croissante L est définie par :

$$L(x) = \begin{cases} (\mu k)(x_k = 0) & \text{si } \exists i \ x_i = 0 \\ (\mu k)(f_k(x) \geq x_k) & \text{si } \forall i \ x_i \neq 0 \end{cases}$$

(rappelons que " $(\mu k)\varphi$ " signifie : le plus petit k tel que φ).

On voit aisément que $f_{L(x)}(x) \geq x_{L(x)}$.

Pour la clarté de l'exposé, nous travaillerons avec S de dimension 2 :

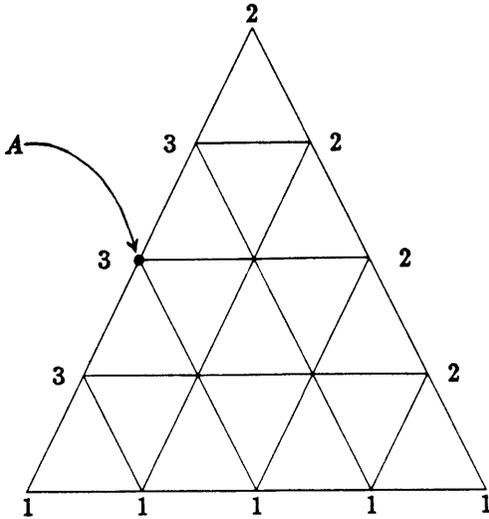


$$\begin{aligned} s_1 &= (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \\ s_2 &= (0, 1, 0) \\ s_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

L'indexation de Scarf donne (quelle que soit $f : S \rightarrow S$) :

$$\begin{aligned} L(s_1) &= 2 \\ L(s_2) &= 1 \\ L(s_3) &= 1. \end{aligned}$$

Considérons une triangulation T de S . Pour les points de T situés sur le bord de S , l'indexation est indépendante de f et donne :

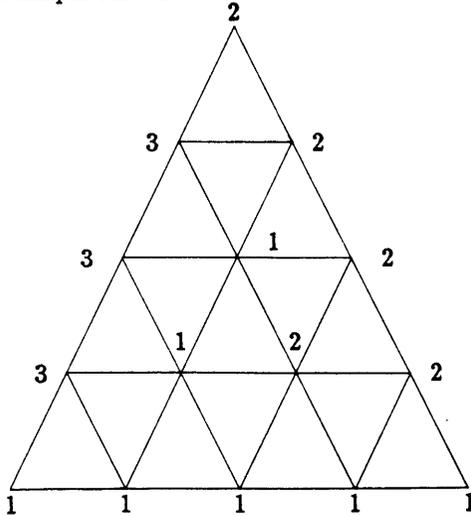


Le point A (par exemple) est $\frac{1}{2}(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 0)$ c'est-à-dire $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ et donc $L(A) = 3 = (\mu_i)(A_i = 0)$.

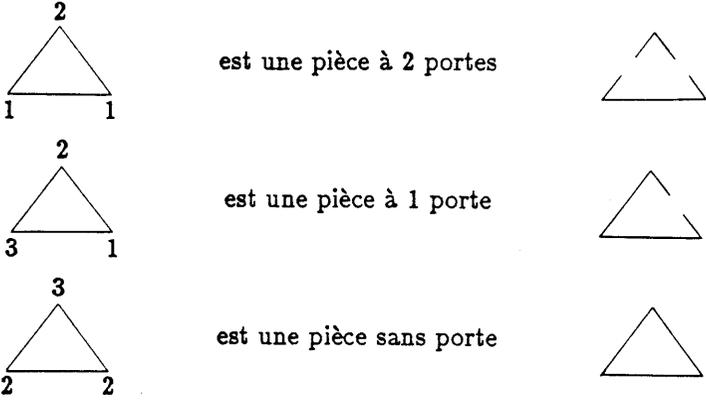
L'indexation des points de T situés à l'intérieur de S dépend de f , puisque pour ces points on a : $\forall i x_i \neq 0$, et que L est alors définie par :

$$L(x) = (\mu_k)(f_k(x) \geq x_k).$$

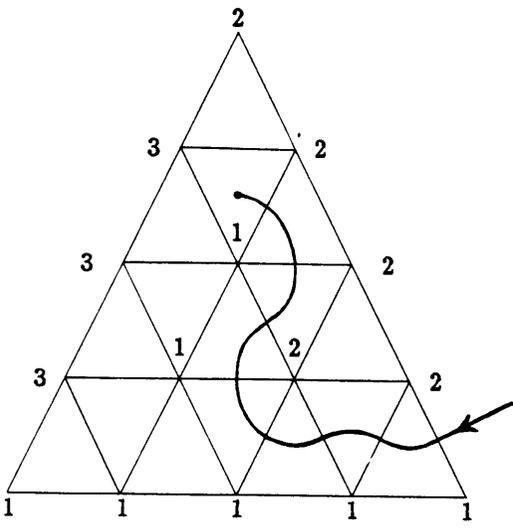
Considérons l'exemple suivant :



S peut être assimilé maintenant à une maison dont les pièces sont les triangles de la triangulation et les portes les côtés (de ces triangles) indexés par 1 et 2. Ainsi :



L'indexation de Scarf garantit (cf le dessin) qu'il n'y a qu'une seule porte sur le bord de S . Les hypothèses du "principe des deux portes" sont satisfaites et il suffit de pénétrer par l'unique porte d'entrée et de suivre l'unique trajet possible pour découvrir une pièce à une porte, c'est-à-dire un simplexe complet (= portant les indices 1, 2, 3) :



L'intérêt d'un tel simplexe complet réside dans le fait que si A, B, C , sont

ses sommets ($L(A) = 1, L(B) = 2, L(C) = 3$), on a :

$$\begin{aligned} f_1(A) &\geq A_1 \\ f_2(B) &\geq B_2 \\ f_3(C) &\geq B_3 \end{aligned}$$

(puisque $f_{L(x)}(x) \geq x_{L(x)}$).

Si l'on avait $A = B = C = x$, alors on aurait $f_i(x) \geq x_i$ ce qui implique $f(x) = x$ (car $\sum_i f_i(x) = \sum_i x_i = 1$ et $0 \leq x_i \leq f_i(x)$), c'est-à-dire que x serait un (vrai) point fixe.

Dans le cas où A, B, C sont suffisamment proches l'un de l'autre, chaque point du triangle ABC est un point presque fixe. On peut préciser ceci : considérons une suite de triangulations T_n dont les normes (norme = le diamètre du plus grand simplexe de la triangulation) tendent vers zéro. Pour chaque T_n on considère l'indexation L de Scarf et on détermine un triangle complet $A_n B_n C_n$. Comme S est un compact, il existe des sous-suites $A_{n_k}, B_{n_k}, C_{n_k}$ convergeant vers A, B, C (éléments de S). On aura (voir ci-dessus) :

$$\begin{aligned} f_1(A_{n_k}) &\geq (A_{n_k})_1 \\ f_2(B_{n_k}) &\geq (B_{n_k})_2 \\ f_3(C_{n_k}) &\geq (C_{n_k})_3. \end{aligned}$$

En passant à la limite :

$$\begin{aligned} f_1(A) &\geq A_1 \\ f_2(B) &\geq B_2 \\ f_3(C) &\geq C_3. \end{aligned}$$

Comme la norme de T_n tend vers 0, on a nécessairement $A = B = C$, d'où

$$f(A) = A.$$

La suite A_n admet donc un (vrai) point fixe A comme point d'accumulation. Il en résulte que $\forall \delta > 0 \exists N$ naturel $\forall n \geq N \ d(A_n, A) < \delta$. Comme f est continue, ceci implique que $\forall \varepsilon > 0 \exists n \ d(f(A_n), A_n) < \varepsilon$.

Algorithme

$\varepsilon > 0$ étant fixé, on construit une triangulation T pour laquelle on détermine un simplexe complet ABC .

On teste alors $d(f(A), A) < \mathcal{E}$.

Si oui, on arrête.

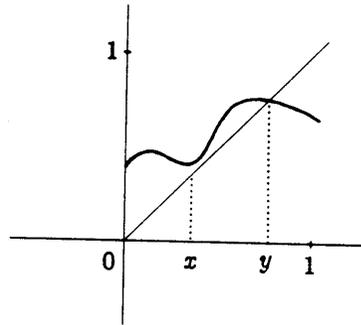
Si non, on recommence avec une triangulation dont la norme vaut (par exemple) la moitié de la norme de T .

Le processus s'arrête en un nombre fini de pas puisque ceci revient à construire une suite de triangulations T_n à norme tendant vers 0 et que l'on sait que dans ce cas : $\forall \mathcal{E} \exists n \ d(f(A_n), A_n) < \mathcal{E}$.

Remarques

1. Les points presque fixes peuvent être très éloignés du vrai point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} S = [0, 1] \\ \mathcal{E} = \frac{1}{4} \\ f = S \rightarrow S \\ x \text{ est un point } \mathcal{E}\text{-fixe} \\ y \text{ est un point fixe} \end{array} \right.$$

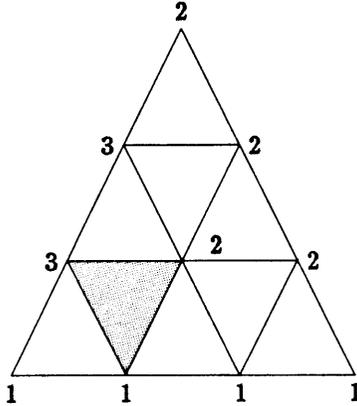


Cet inconvénient (aux yeux des mathématiciens) n'en est pas un aux yeux des économistes pour lesquels, par exemple, une production presque nulle équivaut en pratique à une production vraiment nulle.

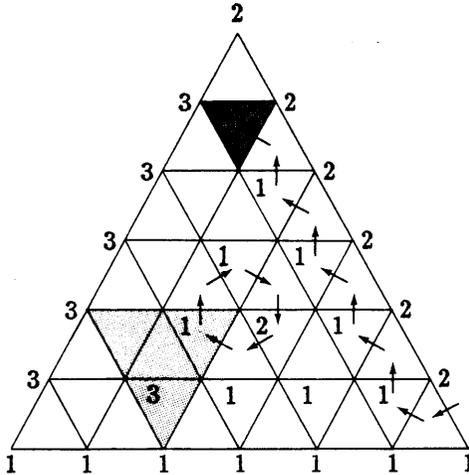
2. D'autres indexations ont été proposées, chacune présentant des avantages et des inconvénients; pour plus de renseignements, consulter [5].
3. Cet algorithme (de Scarf) ne peut être raffiné, c'est-à-dire que pour chaque triangulation, tout le trajet est à recommencer : il ne suffit pas de trianguler uniquement le simplexe complet trouvé à l'étape précédente.

Exemple

Voici la triangulation régulière T (subdivision en 3) dont le simplexe complet est hachuré :



Voici un raffinement T' (subdivision en 6). On remarque que le simplexe complet trouvé précédemment (dans T) possède deux portes.

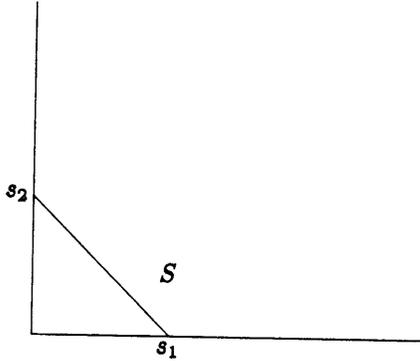


La recherche d'un simplexe complet (pour T') à partir de l'ancien simplexe complet cycle. Le nouveau simplexe complet se trouve en fait en dehors de l'ancien (voir le trajet).

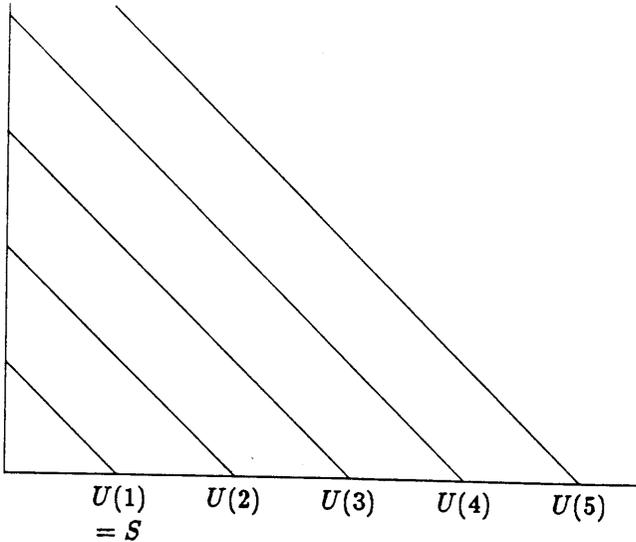
La méthode de raffinement suivante, due à Eaves, permet de remédier à l'inconvénient exposé ci-dessus.

3.2.3. Méthode de raffinement

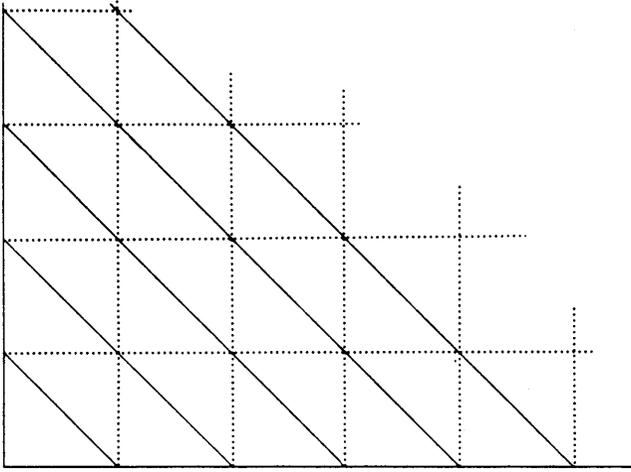
Pour la clarté de l'exposé, considérons le simplexe S , de dimension 1 : $S = \text{conv} \{s_1, s_2\}$ (dans \mathbb{R}^2).



On construit des "copies agrandies" $U(m)$ de S :



D'une manière naturelle, $U(m)$ correspond à S agrandi " m fois", et peut être muni de la triangulation régulière correspondant à la "subdivision par k " :

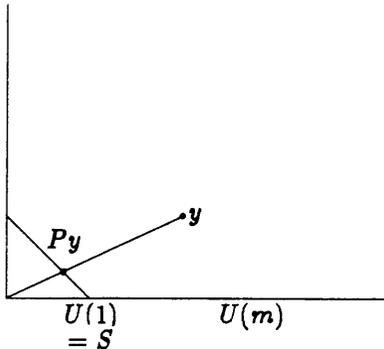


Soit f une fonction continue : $S \rightarrow S$.
 Sur S , on définit l'indexation décroissante :

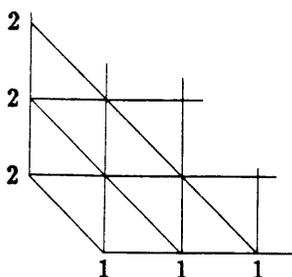
$$L : S \rightarrow \{1, 2\}$$

où $L(x) = (\mu k)(f_k(x) \leq x_k \text{ et } x_k \neq 0)$.

Cette indexation peut s'étendre à la réunion des $U(m)$ en posant $L(y) \stackrel{\text{def}}{=} L(P_y)$ où P_y est la "projection" suivante de y :

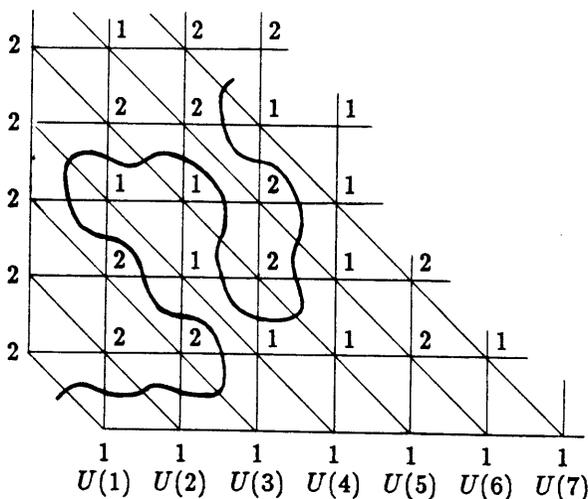


Un simplexe complet, dans ce cadre, sera un simplexe indicé par $\{1, 2\}$.
 On peut remarquer que le bord du "tronc de cône" $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1\}$ ne comporte qu'un seul simplexe complet (= une porte d'entrée) qui est S :



Cela est dû à la définition de L . En considérant les simplexes complets comme étant des portes, il est clair que A est une "maison" à une porte extérieure. Le trajet unique que l'on peut effectuer à partir de S mène nécessairement à des simplexes complets (c'est à dire à des points presque fixes) correspondant à des subdivisions de plus en plus fines. Le procédé de recherche d'un point \mathcal{E} -fixe consiste donc à suivre cet unique trajet et à s'arrêter lorsque le bord (d'indice 1 par exemple) du simplexe complet est \mathcal{E} -fixe.

Exemple :



On voit dans cet exemple qu'il arrive que le chemin "remonte" vers S . Cela indique un changement dans la zone de S où l'on cherche le point presque fixe.

Cette construction est prolongeable indéfiniment et permet, si l'on désire

une meilleure approximation, de partir de la position acquise précédemment : il n'est plus nécessaire ici de repartir de la position initiale.

Remarque

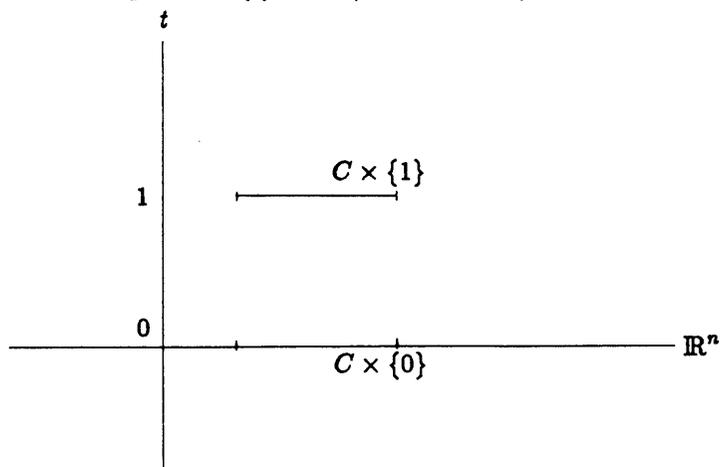
Les algorithmes décrits ci-dessus se laissent facilement programmer : il existe d'excellentes présentations matricielles des constructions qui y interviennent (voir[5]).

3.2.4. Méthodes de continuation

Certains auteurs (Smale, Eaves, ...) proposent une autre approche, fort différente des méthodes qui précèdent, et dont l'efficacité semble très bonne (entre autres en économie appliquée). Le principe de base des méthodes de continuation est le suivant :

Soit f continue $C \rightarrow C$, où C est un compact convexe de \mathbb{R}^n dont l'intérieur est non vide.

On considère des copies $C \times \{t\}$ de C (dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) :

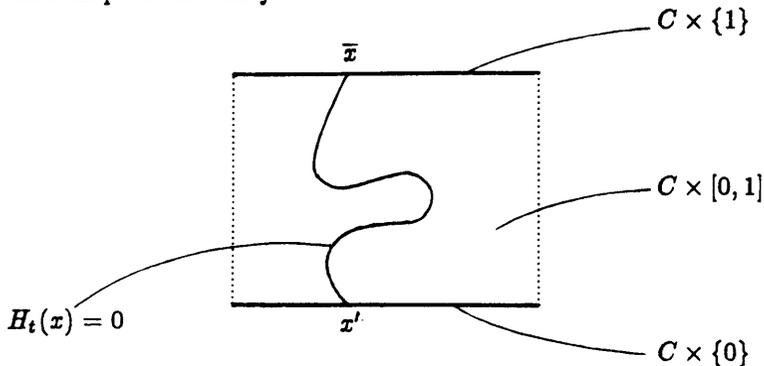


et l'homologie $H_t(x)$ définie par : $H_t(x) = t(x - \bar{x}) + (1 - t)(x - f(x))$, où \bar{x} est un point intérieur arbitraire (dans C) et $t \in [0, 1]$.

Pour $t = 0$, on a : $H_0(x) = x - f(x)$

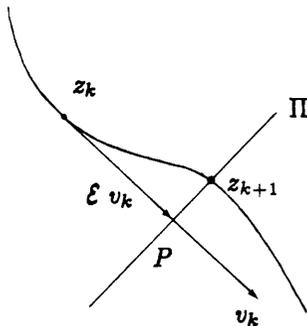
Pour $t = 1$, on a : $H_1(x) = x - \bar{x}$.

La famille H_t permet donc de passer continûment de la fonction $x - \bar{x}$ à la fonction $x - f(x)$. La fonction $x - \bar{x}$ admet un zéro évident : \bar{x} . On considère la courbe définie par : $H_t(x) = 0$. Moyennant de bonnes hypothèses, cette courbe mène du point $(\bar{x}, 1)$ à un point $(x', 0)$, où x' n'est un zéro de $H_0(x)$, c'est-à-dire un point fixe de f :



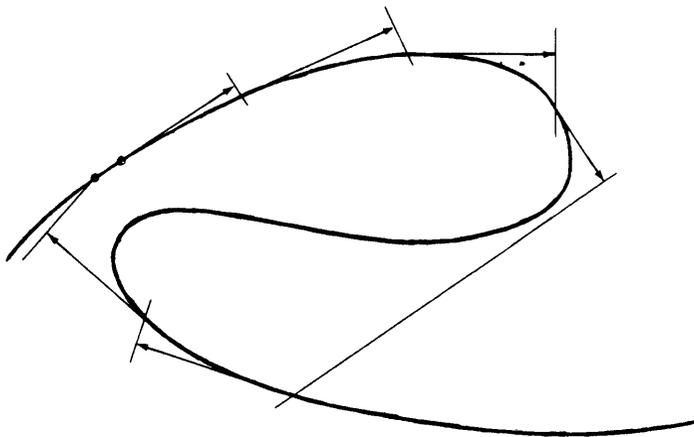
Les hypothèses portent essentiellement sur les dérivées de f et $H_t(x)$ (pour plus de détails, voir [5] et [7]).

En pratique, on suit la courbe par une sorte de procédé de Newton :



On construit une suite z_k (où $(\bar{x}, 1)$ est z_0) de la manière suivante : z_{k+1} est l'intersection de la courbe $H_t(x) = 0$ avec le plan Π orthogonal au vecteur v_k (le vecteur "vitesse", tangent à la courbe, au point z_k), passant par $z_k + \mathcal{E} v_k = P$ (où \mathcal{E} est fixé et assez petit).

Le danger de "cyclage" (lié au choix de \mathcal{E}) existe pour cette méthode (voir dessin ci-dessous), mais pour des courbes "sages" et un \mathcal{E} suffisamment petit, les résultats sont (paraît-il) excellents.



Remarque

Le point presque fixe détecté par la méthode de continuation est en principe proche (= dans le voisinage) du point vraiment fixe, contrairement à ce qui se passe dans les méthodes simpliciales.

4. Références

- [1] DUNFORD et SCHWARTZ,
Linear operators, vol I,
Interscience, New York, 1958.
- [2] KANNAĪ,
An even more elementary calculus proof of the Brouwer fixed point theorem,
American Mathematical Monthly, 1981.
- [3] ROGERS,
A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed point theorem,
American Mathematical Monthly **87**, pp. 525-527, 1980.

- [4] MILNOR,
Analytic proofs of the Hairy Ball Theorem and the Brouwer fixed point theorem,
American Mathematical Monthly **85**, pp. 521-524, 1978.
- [5] HOUX Marie-Claude,
Théorème de Brouwer : Théorie et Applications,
Mémoire U.L.B. (Faculté des Sciences), année 1982-1983.
- [6] NIZETTE N.,
A propos du théorème de Brouwer,
dans *Mélanges Paul Libois*, service de géométrie (U.L.B.).
- [7] HIRSCH and SMALE,
On algorithms for solving $f(x) = 0$,
Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. **32**, pp. 281-312, 1979.
- et
- SMALE,
Global Newton Methods,
Journal of Mathematical Economics, vol.3, pp.107-120, 1976.
- et
- EAVES,
Homotopies for the computation of fixed points,
Math. Programming, vol. **3**, pp.1-22, 1972.
-

Université Libre de Bruxelles
Avenue F. Roosevelt 50
B-1050 Bruxelles