Equivalence élémentaire de structures stratifiées

Daniel Dzierzgowski
(Université Catholique de Louvain)

1. Introduction

Soit $\mathcal{L}_{TT}$, le langage de la Théorie simple des Types.

Rappelons que $\mathcal{L}_{TT}$ est un langage d'ordre infini; il possède un symbole de relation binaire $\in$ comme seul symbole non logique, et une infinité dénombrable de variables de type i $x^i, y^i, \ldots$, pour tout $i \in \omega$. De plus, ses formules atomiques sont de la forme $x^i = y^i$ ou $x^i \in y^{i+1}$.

Une structure au sens de $\mathcal{L}_{TT}$ sera donc de la forme $\mathcal{M} = (M_0, M_1, \ldots; \varepsilon^{\mathcal{M}})$ où les variables de type i varient dans M_i. De plus, $\mathcal{M}$ devra vérifier que

$$\forall i \in \omega \ \ M_i \neq \emptyset \tag{1}$$

et que

$$\varepsilon^{\mathcal{M}} \subset \bigcup_{i\in\omega} M_i \times M_{i+1}. \tag{2}$$

Nous demanderons aussi que

$$\forall i, j \in \omega \ \ i \neq j \Rightarrow M_i \cap M_j = \emptyset. \tag{3}$$

D'autre part, dans la théorie des ensembles du premier ordre, on travaille le plus souvent avec le langage $\mathcal{L}_{ZF}$ dont le seul symbole non logique est le symbole de relation binaire $\in$.

Il est facile de transformer "canoniquement" la structure $\mathcal{M}$ que nous venons de nous donner en une structure au sens de $\mathcal{L}_{ZF}$: il suffit de définir $\bigcup\mathcal{M} = (\bigcup_{i\in\omega} M_i; \varepsilon^{\mathcal{M}})$.

Nous allons montrer ici que l'équivalence élémentaire se conserve quand on passe de $\mathcal{L}_{TT}$ à $\mathcal{L}_{ZF}$, c'est-à-dire que

si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux structures au sens de $\mathcal{L}_{TT}$
et que $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ (au sens de $\mathcal{L}_{TT}$),
alors $\bigcup\mathcal{M} \equiv \bigcup\mathcal{N}$ (au sens de $\mathcal{L}_{ZF}$).

La difficulté provient bien sûr du fait que, avec $\mathcal{L}_{TT}$, on ne peut quantifier que sur un type à la fois, tandis qu'avec $\mathcal{L}_{ZF}$ on quantifie en quelque sorte sur tous les types simultanément.

2. Les types généralisés

2.1. Définition

Nous allons maintenant faire connaissance avec le langage $\mathcal{L}_G$, langage d'ordre infini dans lequel nous pourrons "plonger" $\mathcal{L}_{TT}$ et $\mathcal{L}_{ZF}$.

Comme $\mathcal{L}_{TT}$ et $\mathcal{L}_{ZF}$, $\mathcal{L}_G$ aura comme seul symbole non logique le symbole de relation binaire $\in$. Comme dans $\mathcal{L}_{TT}$, les variables de $\mathcal{L}_G$ seront indicées (en haut à droite) par un indice de type. Mais cet indice, que nous appellerons *indice généralisé* pourra avoir deux formes : il sera

- soit un indice *propre*, c'est-à-dire un nombre naturel (comme pour $\mathcal{L}_{TT}$),
- soit un indice *impropre*, c'est-à-dire un ensemble fini de nombres naturels.

Intuitivement, la variable $x^{\{i_1,i_2,\ldots,i_n\}}$ prendra ses valeurs parmi les objets qui ne sont ni de type i_1, ni de type i_2, ..., ni de type i_n.

Les formules atomiques de $\mathcal{L}_G$ sont de la forme $x^\iota = y^{\iota'}$ ou $x^\iota \in y^{\iota'}$, quels que soient les indices généralisés ι et ι'. Contrairement à ce qui se passe dans $\mathcal{L}_{TT}$, $x^i \in x^i$ sera donc par exemple une formule de $\mathcal{L}_G$.

Nous appellerons *variable propre* (resp. *impropre*) toute variable dont l'indice est propre (resp. impropre), et *formule propre* (resp. *impropre*) toute formule de $\mathcal{L}_G$ dont toutes les variables, libres et liées, sont propres (resp.

impropres). Nous dirons aussi qu'une formule est *homogène* si elle est propre ou impropre.

Enfin, les lettres minuscules $i, j, \ldots$ désigneront dans la suite des indices propres, les lettres majuscules $I, J, \ldots$ des indices impropres, et la lettre ι des indices généralisés quelconques.

2.2. Structures au sens de $\mathcal{L}_G$

De manière analogue à ce qui se passe dans $\mathcal{L}_{TT}$, une structure au sens de $\mathcal{L}_G$ sera de la forme

$$\mathcal{G} = (G_0, G_1, \ldots; G_\emptyset, G_{\{0\}}, G_{\{0,1\}}, G_{\{0,2\}}, \ldots; \varepsilon^{\mathcal{G}}),$$

où chacun des domaines est non-vide.

La satisfaction au sens de $\mathcal{L}_G$ sera définie de manière usuelle, comme pour $\mathcal{L}_{TT}$.

Si maintenant $\mathcal{M}$ est une structure au sens de $\mathcal{L}_{TT}$, on peut aussi lui associer "canoniquement" une structure au sens de $\mathcal{L}_G$. Il suffit de définir

$$\mathcal{M}_G = (M_0, M_1, \ldots; M_\emptyset, M_{\{0\}}, M_{\{0,1\}}, M_{\{0,2\}}, \ldots; \varepsilon^{\mathcal{M}}),$$

où, si $I \subset \omega$, M_I est par définition $\bigcup\limits_{i \in \omega \setminus I} M_i$.

Remarquons que par (3),

$$M_I = \Big(\bigcup_{i \in \omega} M_i\Big) \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big).$$

Dans la suite, $\mathcal{M}$ désignera toujours une structure au sens de $\mathcal{L}_{TT}$.

2.3. Plongement de $\mathcal{L}_{TT}$ et $\mathcal{L}_{ZF}$ dans $\mathcal{L}_G$

Pour $\mathcal{L}_{TT}$, ce plongement est assez simple. En effet, toute formule φ de $\mathcal{L}_{TT}$ est aussi une formule de $\mathcal{L}_G$ et il est trivial de vérifier par induction sur la longueur de φ que

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{M} \models \varphi[m_1, \ldots, m_n] \quad \text{(au sens de } \mathcal{L}_{TT}) \\ \iff & \mathcal{M}_G \models \varphi[m_1, \ldots, m_n] \quad \text{(au sens de } \mathcal{L}_G). \end{array} \tag{4}$$

Pour $\mathcal{L}_{ZF}$, le plongement n'est pas beaucoup plus compliqué. Si φ est une formule de $\mathcal{L}_{ZF}$, définissons $\varphi^{\emptyset}$ par induction de la manière suivante :

- $(x = y)^{\emptyset}$ est $x^{\emptyset} = y^{\emptyset}$; $(x \in y)^{\emptyset}$ est $x^{\emptyset} \in y^{\emptyset}$
- $(\neg\psi)^{\emptyset}$ est $\neg(\psi^{\emptyset})$
- $(\psi \vee \overline{\psi})^{\emptyset}$ est $\psi^{\emptyset} \vee \overline{\psi}^{\emptyset}$
- $(\exists x\ \psi)^{\emptyset}$ est $\exists x^{\emptyset}\ \psi^{\emptyset}$.

Comme $M_{\emptyset} = \bigcup_{i\in\omega\setminus\emptyset} M_i = \bigcup_{i\in\omega} M_i$, il est encore trivial de montrer par induction sur la longueur de φ que

$$\begin{array}{rll} & \bigcup \mathcal{M} \models \varphi[m_1,\ldots,m_n] & (\text{au sens de } \mathcal{L}_{ZF}) \\ \iff & \mathcal{M}_G \models \varphi^{\emptyset}[m_1,\ldots,m_n] & (\text{au sens de } \mathcal{L}_G). \end{array} \tag{5}$$

2.4. TTG

Afin de pouvoir faire des raisonnements purement syntaxiques, nous allons introduire la théorie TTG, construite dans $\mathcal{L}_G$.

TTG sera satisfaite par les structures de la forme $\mathcal{M}_G$ et ses axiomes seront, en plus des axiomes logiques du calcul des prédicats multisorte, les axiomes suivants :

G1. $\neg x^i = y^j$ si $j \neq i$

G2. $\neg x^i \in y^j$ si $j \neq i+1$

G3. $\neg x^i = y^J$ si $i \in J$

G4. $\neg x^i \in y^J$ si $i+1 \in J$

G5. $\neg x^I \in y^j$ si $j = 0$ ou si $j-1 \in I$,

qui sont inspirés par (2) et (3), et le schéma

G6. $\exists x^J\ \varphi(x^J) \iff \exists x^{J\cup\{i\}}\ \varphi(x^{J\cup\{i\}}) \vee \exists x^i\ \varphi(x^i)$ pour toute formule φ de $\mathcal{L}_G$, et pour tout $i \notin J$,

qui est inspiré par la construction de $\mathcal{M}_G$.

3. Définitions

Avant de passer aux démonstrations, nous allons rassembler ici quelques définitions et notations dont l'utilité apparaîtra dans la suite.

3.1. m_φ et M_φ

Si φ est une formule de $\mathcal{L}_G$ qui a au moins une variable propre, alors

- m_φ est le minimum de l'ensemble des indices des variables propres de φ et
- M_φ est le maximum de l'ensemble des indices des variables propres de φ.

3.2. Rang de quantification de variables impropres

Si φ est une formule de $\mathcal{L}_G$, alors $\mathrm{rqi}(\varphi)$ est défini par induction sur la longueur de φ :

- $\mathrm{rqi}(\varphi) = 0$ si φ est atomique
- $\mathrm{rqi}(\neg\psi) = \mathrm{rqi}(\psi)$
- $\mathrm{rqi}(\psi \vee \psi') = \max\{\mathrm{rqi}(\psi), \mathrm{rqi}(\psi')\}$
- $\mathrm{rqi}(\exists x^i\ \psi) = \mathrm{rqi}(\psi)$
- $\mathrm{rqi}(\exists x^I\ \psi) = \mathrm{rqi}(\psi) + 1$.

3.3. Formules connexes

La notion de *formule connexe* dans $\mathcal{L}_G$ sera aussi définie par induction sur la longueur des formules :

- si φ est atomique, alors φ est connexe
- si φ est connexe, alors $\neg\varphi$ est connexe
- si φ et ψ sont connexes **et ont au moins une variable libre commune**, alors $\varphi \vee \psi$ est connexe
- si φ est connexe et si x^ι figure dans φ, alors $\exists x^\iota\ \varphi$ est connexe.

Cette notion sera surtout utilisée via la propriété suivante, qui se montre facilement par induction sur la longueur de φ :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \varphi \text{ est une formule connexe de } \mathcal{L}_G & \\ \quad \text{et si toutes les formules atomiques de } \varphi \text{ sont homogènes,} & (6) \\ \text{alors } \varphi \text{ est homogène.} & \end{array}$$

Mentionnons encore une autre propriété aussi simple, mais dont l'utilité sera moins fondamentale :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \sigma \text{ est un énoncé connexe de } \mathcal{L}_G & \\ \text{alors } \sigma \text{ est de la forme } \exists x^\iota\, \varphi \text{ ou de la forme } \neg\cdots\neg\exists x^\iota\, \varphi. & (7) \end{array}$$

3.4. Longueur d'une formule

Ce que nous appelerons *longueur* d'une formule φ de $\mathcal{L}_G$, et que nous noterons $\lg(\varphi)$, représente en quelque sorte la complexité de φ :

- si φ est atomique, alors $\lg(\varphi) = 0$
- $\lg(\psi \vee \psi') = \max\{\lg(\psi), \lg(\psi')\} + 1$
- $\lg(\neg\psi) = \lg(\psi) + 1$
- $\lg(\exists x^\iota\, \psi) = \lg(\psi) + 1$.

3.5. Combinaison booléenne

Pour fixer les idées, voici la définition de *combinaison booléenne* que nous utiliserons dans la suite :

- si φ est une formule de $\mathcal{L}_G$, alors φ est une combinaison booléenne de φ.
- si Φ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, alors $\neg\Phi$ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$.
- si Φ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_n$ et que Ψ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_k, \psi_0, \ldots, \psi_m$, alors $\Phi \vee \Psi$ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n, \psi_0, \ldots, \psi_m$.
- si Φ est une combinaison booléenne de $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, et si σ est une permutation de $\{0, \ldots, n\}$, alors Φ est une combinaison booléenne de

$\varphi_{\sigma(0)}, \ldots, \varphi_{\sigma(n)}$.

4. Idée de la preuve

Nous voulons montrer que si $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, alors $\bigcup \mathcal{M} \equiv \bigcup \mathcal{N}$, où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux structures au sens de $\mathcal{L}_{TT}$.

En fait, nous allons montrer que

$$\begin{array}{rcll} & \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} & & \text{(au sens de } \mathcal{L}_{TT}) \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{M}_G \equiv \mathcal{N}_G & & \text{(au sens de } \mathcal{L}_G). \end{array} \tag{8}$$

Par (5), nous aurons donc ainsi montré ce que nous voulions.

La partie difficile de (8) est $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M}_G \equiv \mathcal{N}_G$ (l'autre découle de (4)).

Nous montrerons d'abord un lemme fondamental assurant que tout énoncé σ de $\mathcal{L}_G$ est équivalent à un énoncé dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes.

Mais si σ est un énoncé de $\mathcal{L}_G$ dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes, alors nous montrerons que σ est équivalent à une combinaison booléenne d'énoncés connexes σ_i dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes, c'est-à-dire, par (6), à une combinaison booléenne d'énoncés σ_i connexes et homogènes. De plus, pour chaque σ_i, $\mathrm{rqi}(\sigma_i) \leq \mathrm{rqi}(\sigma)$.

Alors, nous pourrons montrer **par induction sur** $\mathrm{rqi}(\sigma)$ que

$$\begin{array}{rc} & \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \\ \Rightarrow & (\mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma). \end{array}$$

En effet, il suffit de montrer que $\mathcal{M}_G \models \sigma_i \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma_i$ pour chaque σ_i cité plus haut. Deux situations sont possibles :

- soit σ_i est propre, et alors nous verrons que σ_i est équivalent à un énoncé stratifié, et nous conclurons par (4);

- soit σ_i est impropre; supposons par exemple que σ_i soit de la forme $\exists x^I\ \varphi(x^I)$. Alors

$$\begin{array}{rc} & \mathcal{M}_G \models \exists x^I\ \varphi(x^I) \\ \Longleftrightarrow & \text{il existe } i \in \omega \setminus I \text{ tel que } \mathcal{M}_G \models \exists x^i\, \varphi(x^i) \\ \Longleftrightarrow & \text{il existe } i \in \omega \setminus I \text{ tel que } \mathcal{N}_G \models \exists x^i\, \varphi(x^i) \\ & (\text{parinduction, car } \mathrm{rqi}(\exists x^i\ \varphi(x^i)) < \mathrm{rqi}(\sigma_i) \leq \mathrm{rqi}(\sigma)) \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N}_G \models \exists x^I\ \varphi(x^I). \end{array}$$

Telle est l'idée de la preuve. Commençons donc maintenant par

5. Le lemme fondamental

Il s'énonce comme suit :

Lemme 1:

Si φ est une formule non homogène de $\mathcal{L}_G$ telle que

si I est le type d'une variable libre impropre de φ
alors $I \supset \{l\ :\ m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)}\}$

ou si φ est une formule homogène de $\mathcal{L}_G$,
alors il existe une formule φ_h de $\mathcal{L}_G$ telle que

- TTG $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi_h$
- $\mathrm{rqi}(\varphi_h) \leq \mathrm{rqi}(\varphi)$
- toute sous-formule atomique de φ_h est homogène
- toute variable libre de φ_h est aussi une variable libre de φ.

PREUVE :

La preuve se fera par induction sur la longueur de φ. Nous donnerons en fait une construction justifiée de φ_h, tout en montrant que TTG $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi_h$. Le reste de la thèse est assez simple à vérifier; il sera laissé en exercice.

- si φ est atomique et homogène, alors il suffit de poser φ_h identique à φ.
- si φ est atomique et non homogène, alors supposons que x^i et y^I soient les deux variables qui figurent dans φ. Comme $\mathrm{rqi}(\varphi) = 0$, alors $i \dot{-} 1, i, i+1 \in I$, par l'hypothèse du lemme. Donc, par les axiomes G3

à G5 de TTG, il suffit que φ_h soit $x^i \neq x^i \vee y^I \neq y^I$, qui, comme φ, est toujours fausse.

- si φ est $\neg\psi$, alors il clair que ψ répond aussi aux hypothèses du lemme, et que nous pouvons poser φ_h identique à $\neg(\psi_h)$.
- si φ est $\psi \vee \overline{\psi}$, alors si par exemple ψ est non homogène, et si I est l'indice d'une variable libre impropre de ψ, alors

$$\begin{aligned} & \{l : m_\psi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\psi)} \leq l \leq M_\psi + 2^{\mathrm{rqi}(\psi)}\} \\ \subset \ & \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)}\} \\ & \quad (\text{car } m_\varphi \leq m_\psi,\ M_\varphi \geq M_\psi \text{ et } \mathrm{rqi}(\psi) \leq \mathrm{rqi}(\varphi)) \\ \subset \ & I. \end{aligned}$$

Ceci suffit pour montrer que ψ vérifie les hypothèses du lemme; par hypothèse d'induction, ψ_h existe donc. De même, $\overline{\psi}_h$ existe et il est clair qu'il suffit de poser φ_h identique à $\psi_h \vee \overline{\psi}_h$ pour arriver à la thèse du lemme.

- si φ est $\exists x^\iota\, \psi$ et que x^ι ne figure pas libre dans ψ, alors il suffit que φ_h soit ψ_h, par un argument similaire à celui du cas précédent.
- si φ est $\exists x^i\, \psi(x^i)$ et que x^i figure libre dans ψ, alors $m_\psi = m_\varphi, M_\psi = M_\varphi, \mathrm{rqi}(\psi) = \mathrm{rqi}(\varphi)$ et, comme précédemment, ψ répond aux hypothèses du lemme et ψ_h existe. Il suffit alors de poser φ_h identique à $\exists x^i\, \psi_h$.
- si φ est $\exists x^J\, \psi(x^J)$, que x^J figure libre dans ψ, et que ψ n'a pas de variable propre, alors, clairement, il suffit que φ_h soit φ.
- si φ est $\exists x^J\, \psi(x^J)$, que x^J figure libre dans ψ, et que ψ a au moins une variable propre, alors soit

$$J' = J \cup \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\}. \tag{9}$$

Par G6, nous pourrions poser φ_h identique à

$$\exists x^{J'}\, \psi_h(x^{J'}) \vee \bigvee_{i \in J' \setminus J} \exists x^i\, \psi_h(x^i).$$

Il nous suffit donc de montrer que $\psi(x^{J'})$ et les $\psi(x^i)$ vérifient les hypothèses du lemme, ce qui garantira l'existence de $\psi_h(x^{J'})$ et des

$\psi_h(x^i)$.
Voyons d'abord le cas de $\psi(x^{J'})$. Si I est l'indice d'une variable libre impropre de $\psi(x^{J'})$, alors soit I est l'indice d'une variable libre de φ, soit I est J'. Si I est l'indice d'une variable libre impropre de φ, alors

$$\begin{aligned}
& \{l : m_{\psi(x^{J'})} \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^{J'}))} \leq l \leq M_{\psi(x^{J'})} + 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^{J'}))}\} \\
= \; & \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} \\
& (\text{car } m_\varphi = m_{\psi(x^{J'})},\, M_\varphi = M_{\psi(x^{J'})} \text{ et } \mathrm{rqi}(\psi(x^{J'})) = \mathrm{rqi}(\varphi) - 1) \\
\subset \; & \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)}\} \\
\subset \; & I.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
J' \supset \; & \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} \\
& (\text{par } (9)) \\
= \; & \{l : m_{\psi(x^{J'})} \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^{J'}))} \leq l \leq M_{\psi(x^{J'})} + 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^{J'}))}\} \\
& (\text{comme plus haut}).
\end{aligned}$$

$\psi(x^{J'})$ vérifie donc bien les hypothèses du lemme. Voyons maintenant que c'est aussi le cas pour chaque $\psi(x^i)$.
Si $\psi(x^i)$ est homogène, c'est terminé. Et si $\psi(x^i)$ n'est pas homogène, soit I l'indice d'une de ses variables libres impropres.
Alors,

$$\begin{aligned}
& \{l : m_{\psi(x^i)} \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^i))} \leq l \leq M_{\psi(x^i)} + 2^{\mathrm{rqi}(\psi(x^i))}\} \\
= \; & \{l : \min\{m_\varphi, i\} \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} \leq l \leq \max\{M_\varphi, i\} + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} \\
\subset \; & \{l : \min\{m_\varphi, m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} \leq l \leq \\
& \quad \max\{M_\varphi, M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}\} \qquad (\text{par } (9)) \\
= \; & \{l : m_\varphi \dot{-} (2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1}) \leq l \leq \\
& \quad M_\varphi + (2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1} + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)-1})\} \\
= \; & \{l : m_\varphi \dot{-} 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)} \leq l \leq M_\varphi + 2^{\mathrm{rqi}(\varphi)}\} \\
\subset \; & I.
\end{aligned}$$

$\psi(x^i)$ vérifie donc aussi les hypothèses du lemme. $\square$

Remarque : Les axiomes G1 et G2 n'ont pas été utilisés dans cette preuve.

6. Passage aux formules connexes

Lemme 2:

Toute formule φ de $\mathcal{L}_G$ est équivalente dans TTG à une combinaison booléenne φ_c de formules $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ telles que pour tout $i \leq n$:

- $\mathrm{rqi}(\varphi_i) \leq \mathrm{rqi}(\varphi)$
- φ_i est connexe
- toute variable libre de φ_i est une variable libre de φ
- toute sous-formule atomique de φ_i est aussi une sous-formule atomique de φ.

PREUVE :

Un théorème de ce genre a déjà été évoqué par M. Crabbé (*Ambiguity and stratification*, Fundamenta Mathematicæ **101** (1978), p. 14).

Nous allons en fait montrer que φ_c est de la forme $\bigvee_{i<k} \bigwedge_{j<k_i} \varphi_{ij}$, où les φ_{ij} seront les φ_i mentionnées dans l'énoncé du lemme. Pour être tout-à-fait conforme à notre définition de combinaison booléenne, cette formule φ_c pourra aussi s'écrire $\bigvee_{i<k} \neg \bigvee_{j<k_i} \neg\varphi_{ij}$.

La preuve se fait par induction sur la longueur de φ. En voici une esquisse :

- si φ est atomique, alors il suffit que φ_c soit φ.
- si φ est $\psi \vee \psi'$, alors il suffit de poser φ_c identique à $\psi_c \vee \psi'_c$.
- si φ est $\neg\psi$, et si ψ_c est $\bigvee_{i<l} \bigwedge_{j<k_i} \psi_{ij}$, alors $\neg\psi_c$ peut aussi se mettre sous la forme $\bigwedge_{i<l} \bigvee_{j<k_i} \neg\psi_{ij}$, ou encore sous la forme $\bigvee_{j_1<k_1} \cdots \bigvee_{j_l<k_{l-1}} \bigwedge_{i<l} \neg\psi_{ij_i}$.
  Il suffit que φ_c soit cette dernière formule.
- si φ est $\exists x^\iota\ \psi$, et si ψ_c est $\bigvee_{i<l} \bigwedge_{j<k_i} \psi_{ij}$, alors nous pouvons aussi supposer que pour chaque i, il existe un entier l_i tel que x^ι figure libre dans ψ_{ij} si et seulement si $j < l_i$. Alors, chacune des formules $(\exists x^\iota \bigwedge_{j<l_i} \psi_{ij})$ est connexe. D'autre part, comme par hypothèse

d'induction $\mathrm{rqi}(\psi_{ij}) \leq \mathrm{rqi}(\psi)$ pour chacune des ψ_{ij},
$\mathrm{rqi}(\exists x^\iota \bigwedge_{j<l_i} \psi_{ij}) \leq \mathrm{rqi}(\exists x^\iota \psi) = \mathrm{rqi}(\varphi)$.

Il suffit alors de poser φ_c identique à $\bigvee_{i<l} \left[(\exists x^\iota \bigwedge_{j<l_i} \psi_{ij}) \wedge \bigwedge_{l_i \leq j < k_i} \psi_{ij} \right]$, qui est équivalente à $\exists x^\iota \psi_c$. □

Lemme 3:

Si σ est un énoncé de $\mathcal{L}_G$ dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes,

alors σ est équivalent dans TTG à un énoncé σ_c qui est une combinaison booléenne d'énoncés $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ tels que pour tout $i \leq n$,

- $\mathrm{rqi}(\sigma_i) \leq \mathrm{rqi}(\sigma)$
- σ_i est connexe et homogène.

PREUVE :

Par le lemme précédent, et comme un énoncé n'a pas de variable libre, σ sera équivalent dans TTG à un énoncé σ_c qui est une combinaison booléenne d'**énoncés** connexes $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ tels que pour tout $i \leq n$

- $\mathrm{rqi}(\sigma_i) \leq \mathrm{rqi}(\sigma)$
- toute sous-formule atomique de σ_i est une sous-formule atomique de σ.

Chaque σ_i est donc un énoncé connexe dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes. Par (6), chaque σ_i est donc connexe et homogène. □

7. Conservation de l'équivalence élémentaire

7.1. Formules propres et formules stratifiées

Avant d'arriver au résultat principal, nous devons encore montrer un lemme facile qui nous servira dans la suite.

Lemme 4:

> Dans TTG, toute formule **propre** φ de $\mathcal{L}_G$ est équivalente à une formule stratifiée φ_s qui a les mêmes variables libres.

PREUVE :

La preuve se fait par induction sur la longueur de φ.

- si φ est $x^i = x^i$, $x^i = y^i$ ou $x^i \in y^{i+1}$, alors clairement, il suffit que φ_s soit φ.
- si φ est $x^i \in x^i$, $x^i = y^j$ avec $j \neq i$, ou $x^i_* \in y^j$ avec $j \neq i+1$, alors φ est toujours fausse, par les axiomes G1 et G2 (qui seront en fait les seuls axiomes de TTG utilisés ici). Et donc, nous pouvons par exemple poser φ_s identique à $x^i \neq x^i \ \vee \ y^j \neq y^j$.
- si φ est $\neg\psi$, alors, par hypothèse d'induction, nous pouvons poser φ_s identique à $\neg(\psi_s)$.
- si φ est $\psi \vee \overline{\psi}$, alors, par hypothèse d'induction, nous pouvons poser φ_s identique à $\psi_s \vee \overline{\psi}_s$.
- enfin, si φ est $\exists x^i\, \psi$, alors, par hypothèse d'induction, nous pouvons poser φ_s identique à $\exists x^i\,(\psi_s)$. $\square$

7.2. $\mathcal{L}_{TT}$ et $\mathcal{L}_G$

Nous arrivons maintenant au résultat principal dont notre problème initial ($\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \implies \bigcup\mathcal{M} \equiv \bigcup\mathcal{N}$) sera un corollaire.

Théorème 1:

> Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux structures au sens de $\mathcal{L}_{TT}$ (qui répondent donc à (1), (2) et (3)),
>
> alors
>
> $$\begin{array}{rll} & \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} & (\text{au sens de } \mathcal{L}_{TT}) \\ \iff & \mathcal{M}_G \equiv \mathcal{N}_G & (\text{au sens de } \mathcal{L}_G). \end{array}$$

PREUVE :

L'idée de la preuve a déjà été donnée. Voici les détails.

$\Longleftarrow$ Si $\mathcal{M}_G \equiv \mathcal{N}_G$, alors, en particulier, si σ est un énoncé stratifié, $\mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma$. Mais par (4), $\mathcal{M} \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma \Leftrightarrow$

$\mathcal{N} \models \sigma$.

Donc, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ (au sens de $\mathcal{L}_{TT}$).

$\Longrightarrow$ Si $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, alors soit σ un énoncé de $\mathcal{L}_G$. Nous allons montrer par induction sur rqi(σ) que $\mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma$. Comme σ n'a pas de variable libre, nous savons par le Lemme 1 que σ est équivalent dans TTG à σ_h qui est un énoncé dont toutes les sous-formules atomiques sont homogènes et tel que rqi(σ_h) $\leq$ rqi(σ).

Maintenant, par le Lemme 3, σ_h est équivalent, dans TTG, à σ_{hc} qui est une combinaison booléenne d'énoncés σ_i où chaque σ_i est tel que

- rqi(σ_i) $\leq$ rqi(σ_h) $\leq$ rqi(σ)
- σ_i est connexe et homogène.

D'autre part, comme $\mathcal{M}_G \models$ TTG, $\mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \sigma_h \Leftrightarrow \sigma_{hc}$, de même pour $\mathcal{N}_G$. Notre problème se ramène donc à montrer que $\mathcal{M}_G \models \sigma_{hc} \Longleftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma_{hc}$.

Mais $\models$ commute avec $\neg$ et $\vee$: par exemple, $(\mathcal{M}_G \models \neg\psi) \Longleftrightarrow \neg(\mathcal{M}_G \models \psi)$. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{M}_G \models \sigma_i \Longleftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma_i$, pour chacun des σ_i.

Donnons-nous donc un σ_i. Comme σ_i est homogène, deux cas sont possibles :

- soit σ_i est propre, et alors, avec les notations du Lemme 4,

$$\begin{array}{rcl} & \mathcal{M}_G \models \sigma_i & \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{M}_G \models (\sigma_i)_s & \text{(par le Lemme 4)} \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{M} \models (\sigma_i)_s & \text{(par (4))} \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N} \models (\sigma_i)_s & \text{(par hypothèse)} \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N}_G \models (\sigma_i)_s & \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N}_G \models \sigma_i. & \end{array}$$

- soit σ_i est impropre; comme σ_i est connexe, alors, par (7), σ_i est de la forme $\exists x^I\ \varphi(x^I)$ ou de la forme $\neg\cdots\neg\exists x^I\ \varphi(x^I)$.

  Si σ_i est de la forme $\exists x^I\ \varphi(x^I)$, alors

$$\begin{array}{rc} & \mathcal{M}_G \models \exists x^I\ \varphi(x^I) \\ \Longleftrightarrow & \text{il existe } i \in \omega \setminus I \text{ tel que } \mathcal{M}_G \models \exists x^i\ \varphi(x^i) \\ \Longleftrightarrow & \text{il existe } i \in \omega \setminus I \text{ tel que } \mathcal{N}_G \models \exists x^i\ \varphi(x^i) \\ & \text{(par d'induction, car rqi}(\exists x^i\ \varphi(x^i)) < \text{rqi}(\sigma_i) \leq \text{rqi}(\sigma)) \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N}_G \models \exists x^I\ \varphi(x^I). \end{array}$$

Et si σ_i est de la forme $\neg \cdots \neg \exists x^I \; \varphi(x^I)$, il suffit de faire un raisonnement tout-à-fait analogue.

Donc $\mathcal{M}_G \models \sigma \Leftrightarrow \mathcal{M}_G \models \sigma_{hc} \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma_{hc} \Leftrightarrow \mathcal{N}_G \models \sigma$, et donc $\mathcal{M}_G \equiv \mathcal{N}_G$. $\square$

7.3. $\mathcal{L}_{TT}$ et $\mathcal{L}_{ZF}$

Voici enfin la preuve du problème initial.

Théorème 2:

Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux structures au sens de $\mathcal{L}_{TT}$ (qui répondent donc à (1), (2) et (3)),

alors

$$\begin{array}{rll} & \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} & \text{(au sens de } \mathcal{L}_{TT}) \\ \Longrightarrow & \bigcup \mathcal{M} \equiv \bigcup \mathcal{N} & \text{(au sens de } \mathcal{L}_{ZF}). \end{array}$$

PREUVE :

Soit σ un énoncé de $\mathcal{L}_{ZF}$. Alors,

$$\begin{array}{rll} & \bigcup \mathcal{M} \models \sigma & \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{M}_G \models \sigma^{\emptyset} & \text{(par (5))} \\ \Longleftrightarrow & \mathcal{N}_G \models \sigma^{\emptyset} & \text{(par le théorème 1)} \\ \Longleftrightarrow & \bigcup \mathcal{N} \models \sigma. & \end{array}$$

Et donc $\bigcup \mathcal{M} \equiv \bigcup \mathcal{N}$. $\square$

7.4. La réciproque

La réciproque du théorème précédent, c'est-à-dire $\bigcup \mathcal{M} \equiv \bigcup \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, est en général fausse !

Il suffit pour le voir de considérer les structures $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ dont les domaines et les relations sont définis de la manière suivante :

- $M_0 = \{0, 1\}$, et $M_i = \{i+1\}$, si $i \geq 1$
- $\varepsilon^{\mathcal{M}} = \emptyset$
- $N_i = \{i\}$, pour tout $i \in \omega$
- $\varepsilon^{\mathcal{N}} = \emptyset$.

$\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ ne sont pas élémentairement équivalentes (au sens de $\mathcal{L}_{TT}$). En effet, $\mathcal{M}$ satisfait l'énoncé $\exists x^0 \exists y^0\ x^0 \neq y^0$, ce qui n'est pas le cas pour $\mathcal{N}$.

Cependant, $id : \bigcup \mathcal{M} \longrightarrow \bigcup \mathcal{N} : x \longmapsto x$ est un isomorphisme. A fortiori, $\bigcup \mathcal{M}$ et $\bigcup \mathcal{N}$ sont donc élémentairement équivalentes (au sens de $\mathcal{L}_{ZF}$).

La réciproque du théorème précédent est donc fausse en général. Il est cependant possible de trouver des conditions suffisantes sur les structures pour que cette réciproque soit vraie.

Par exemple, on peut montrer qu'une telle condition est que, pour tout $i \in \omega$, il existe une formule $\varphi^i(x)$ de $\mathcal{L}_{ZF}$ telle que pour tout $a \in \bigcup_{i \in \omega} M_i$ et pour tout $b \in \bigcup_{i \in \omega} N_i$,

- $\bigcup \mathcal{M} \models \varphi^i[a] \iff a \in M_i$, et
- $\bigcup \mathcal{N} \models \varphi^i[b] \iff b \in N_i$.

Intuitivement, pour que la réciproque soit vraie, il suffit que les types soient en quelque sorte "définissables". Par exemple, la réciproque sera encore vraie si $\mathcal{L}_{ZF}$ est remplacé par le langage $\mathcal{L}_{ZF} \cup \{T^0, T^1, \ldots\}$, où, chaque T^i est un symbole de prédicat unaire représentant le type i.

Remerciements

Les remerciements d'usage iront à Marcel CRABBE qui a bien voulu lire la première version touffue des idées présentées ici et a proposé des simplifications importantes dans la présentation.

Université Catholique de Louvain
Faculté des Sciences Appliquées
Unité d'Informatique
Place Sainte-Barbe 2
B-1348 Louvain-la-Neuve