NF ET L'AXIOME D'UNIVERSALITÉ

Roland HINNION
(Université Libre de Bruxelles)

A. Introduction.

Rappelons que NF est la théorie des ensembles (dans le langage de la théorie de Zermelo-Fraenkel) dont les axiomes sont :

1) l'axiome d'extensionalité (noté "EXT") :

$$[\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y)] \rightarrow x = y$$

2) le schéma de compréhension pour les formules φ stratifiées :

$$\exists x \ \forall t \quad (t \in x \leftrightarrow \varphi) \ .$$

Rappelons qu'une formule est stratifiée si on peut l'interpréter comme une formule de la théorie simple des types de Russell.
L'étude des relations bien fondées extensionnelles dans NF a permis de montrer que l'on peut interpréter des fragments de la théorie de Zermelo-Fraenkel (avec axiome de fondement) dans NF, fragments intéressants (par exemple toute la théorie de Zermelo) si l'on renforce NF par des axiomes adéquats concernant les cardinaux ([1] , [2] , [3]). D'autre part, cette étude a permis d'étendre aux relations bien fondées extensionnelles un résultat de Henson concernant les bons ordres stricts ([1] , [4] , [5]). Le but de la présente étude est de montrer qu'il existe une classe de relations extensionnelles, plus large que celle des relations bien fondées extensionnelles, permettant de généraliser encore le résultat de Henson et de construire une structure intéressante, modèle du langage de

Gödel-Bernays, ayant la particularité de satisfaire un axiome d'universalité (au sens où l'entend M. Boffa dans [6]) : ce type d'axiome est une négation forte de l'axiome de fondement, puisqu'il affirme que toute relation extensionnelle (satisfaisant dans notre étude une condition que nous préciserons plus loin) est isomorphe à la restriction de l'appartenance $\in$ à une classe transitive. Cela signifie que la classique contraction de Mostowki ([6]) s'étend ici à une classe large de relations extensionnelles. En renforçant NF par un axiome adéquat sur les cardinaux, on obtient un modèle d'une extension de la théorie de Zermelo comprenant un axiome d'universalité.

B. Notations et définitions. (dans NF)

- L'univers V est l'ensemble $\{x|x = x\}$.
- L'ensemble vide $\{x|x \neq x\}$ se note ϕ.
- Les opérations "USC" et "RUSC", désormais classiques, sont définies par :

$$USC(A) = \{\{t\}|t \in A\}$$

$$RUSC(R) = \{<\{x\},\{y\}> \mid <x,y> \in R\}$$

(où R est une relation binaire).

Le couple utilisé généralement dans NF n'est pas celui de Kuratowski ($<x,y> = \{\{x\},\{x,y\}\}$) mais celui de Quine (voir ci-dessous).

- A est "cantorien" si $\exists f$ bijection $A \to USC(A)$.
  Si, de plus, il existe une bijection réalisant $x \mapsto \{x\}$, on dit que A est "fortement cantorien".
- Px est l'ensemble des parties de x :

$$Px = \{y|y \subset x\}.$$

- $\cup x$ est la réunion de x :

$$\cup x = \{z| \exists t \in x \quad z \in t\}.$$

- Le cardinal d'un ensemble x est la classe d'équipotence de x :

$$N_c(x) = \{y| \exists \text{ bijection } y \to x\}.$$

- L'ordinal d'un bon ordre R est la classe d'isomorphie de R :

$$N_o(R) = \{S|S \cong R\} .$$

- De manière plus générale, le type d'une relation R est la classe d'isomorphie de R :

$$\mathcal{T}(R) = \{S \mid S \cong R\} \quad .$$

- L'opération T s'applique aux cardinaux et aux types :

$$T(N_c(A)) = N_c(USC(A))$$

$$T(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(RUSC(R)).$$

- Le cardinal d'un ensemble dénombrable se noté $\aleph_0$.
- L'ordinal correspondant se note ω_0 .
- L'ensemble des naturels se note $\mathbb{N}$, un naturel étant le cardinal d'un ensemble fini.
- Le couple de Quine se définit par :

$$< x,y > = f_1(x) \cup f_2(y)$$

$$\text{où} \quad f_1(x) = \{h_1(t) \mid t \in x\}$$

$$f_2(y) = \{h_2(z) \mid z \in y\}$$

$$h_1(t) = (t \setminus \mathbb{N}) \cup \{n+1 \mid n \in t \cap \mathbb{N}\}$$

$$h_2(z) = h_1(z) \cup \{0\} \ .$$

On remarque que dans la formule stratifiée $z = < x,y >$, "x", "y" et "z" sont au même niveau de stratification. Le couple de Quine ne fait pas monter le niveau : en cela réside son avantage sur le couple de Kuratowski (dans NF !).
- Si R est une relation (binaire), dom R = $\{a \mid \exists b \ (a \ R \ b \text{ ou } b \ R \ a)\}$.
- Si $A \subset$ dom R, A est dit "codé" par a (élément de dom R) ssi $A = \{b \in \text{dom } R \mid b \ R \ a\}$.

  Si R est extensionnelle, un tel élément a est unique et se note "cod_R A".
- Si $a \in$ dom R, "seg_R a" désigne la restriction de R au plus petit sous-ensemble X de dom R tel que

  1) $a \in X$

  2) $\forall b \in X \quad \forall c \in \text{dom } R \ (c \ R \ b \Rightarrow c \in X)$.

  La "profondeur" de b (où $b \in \text{dom seg}_R$ a) par rapport à a est définie par :

$p(b,a)$ = le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une suite x_k d'éléments de dom R telle que

$$b = x_1 \ , \ x_1 \, R \, x_2 \ , \ \dots \ , \ x_{n-1} \, R \, x_n \ , \ x_n = a.$$

- Une relation R est dite "pointée" s'il existe un élément <u>unique</u> a dans dom R tel que $R = seg_R\ a$. Cet élément se note "s_R" ("sommet de R"). Pour une relation pointée, on a donc trivialement :

$$seg_R(s_R) = R \quad .$$

- Une relation R est dite "rigide" ssi

$$\forall a,b \in \text{dom } R \ (seg_R a \cong seg_R b \to a = b).$$

Il est évident que toute relation rigide est extensionnelle et que toute relation bien fondée extensionnelle est rigide.

- Une partie A de dom R est dite R-transitive si

$$\forall x,y \quad [\ (y \in A \text{ et } x \, R \, y) \to x \in A\ ] .$$

On vérifie aisément que R est rigide ssi toute partie R-transitive de dom R n'admet que l'identité comme automorphisme.

- Si $A \subset R$, $Cl_R(A)$ désignera la "fermeture transitive de A dans R" c'est-à-dire la plus petite partie transitive X de dom R contenant A. On a clairement :

$$Cl_R(A) = \bigcup_{a \in A} (\text{dom } seg_R\ a).$$

Trivialement : A est R-transitif ssi $Cl_R(A) = A$.

- La structure qui nous intéresse ici est la suivante :

$$\Omega = \{T(R) \mid R \text{ est une relation pointée rigide}\} \ .$$

On munit Ω de la relation naturelle "E" (cf. [2] , [3] , [5]) :

$$T(R) \ E \ T(S) \text{ ssi } \exists b \ (b \ S \ s_S \text{ et } R \cong seg_S\ b).$$

C. Lemmes fondamentaux

1) L'opération T est un morphisme injectif de (Ω, E). On vérifie en effet aisément que

$$(x\ E\ y \leftrightarrow Tx\ E\ Ty) \qquad \text{et} \qquad (Tx = Ty \leftrightarrow x = y)\ .$$

2) $$x\ E\ Ty \rightarrow \exists z \quad x = Tz \qquad (x,y,z \in \Omega).$$

Ce résultat permet de montrer aisément :

$$x \in \mathrm{dom}(\mathrm{seg}_E\ (T^k y)) \rightarrow \exists z \qquad x = T^k z \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots)\ .$$

Définition : "x est un T^k" signifie :

$$"\exists z \quad x = T^k z\,"$$

$$(\text{où} \quad T^o z = z\ ,\ T^{n+1} z = T(T^n z)).$$

3) Si $x \in \Omega$ et $x = \mathcal{T}(R)$.
Alors $\forall y \in Cl_E(x)\ \ \exists! b \in \mathrm{dom}\ R \qquad y = \mathcal{T}(\mathrm{seg}_R\, b)$.
Ce lemme se démontre par induction sur la profondeur de y par rapport à x dans $< \Omega, E >$.

4) $\forall x \in \Omega \qquad \mathcal{T}(\mathrm{seg}_E\ x) = T^2(x)$.

Démonstration.
Si $x = \mathcal{T}(R)$, il faut prouver que $\mathrm{seg}_E\, x$ est isomorphe à $RUSC^2(R)$. L'isomorphisme F est donné par : $F(y) = \{\{b\}\}$ où b est l'unique élément de dom R tel que $y = \mathcal{T}(\mathrm{seg}_R\, b)$; un tel b existe par le lemme 2; c'est la rigidité de R qui garantit son unicité.

5) E est rigide.
En effet : si $\mathrm{seg}_E\, a \cong \mathrm{seg}_E\, b$, alors, par le lemme 4, on a :

$$T^2 a = T^2 b \qquad \text{et donc} \qquad a = b\ .$$

En particulier, $< \Omega, E > \ \models E \times T$.

6) "Lemme de codage" :
Soit $A \subset \Omega$.
Alors
A est codée dans $<\Omega, E>$ ssi $N_c(Cl_E\, A) \leqslant N_c(USC^2(V))$.

<u>Démonstration</u> : (cf. [3])

a) On peut montrer que si A est E-transitif,
A est codée ssi $N_c(A) \leqslant N_c(USC^2(V))$;
le lemme 4 est essentiel ici.

b) On montre aisément que
A est codée ssi $Cl_E(A)$ est codée.

D. <u>Généralisation du théorème de Henson</u> : (cf. [4])

Rappelons brièvement la "méthode des permutations" : si p est une permutation (un ensemble) de l'univers V d'un modèle M de NF et si "$\in_p$" est défini par : $x \in_p y \leftrightarrow x \in p(y)$, alors la structure M_p obtenue en remplaçant "$\in$" par "$\in_p$" est encore un modèle de NF. Pour toute formule φ, on définit φ_p comme étant le résultat du remplacement de "$\in$" par "$\in_p$" dans φ (φ_p est l'interprétation de φ dans M_p). Une sentence σ est dite "invariante" si NF $\vdash \sigma \leftrightarrow \sigma_p$ (pour toute permutation p).

Toute formule close (= sentence) <u>stratifiée</u> est d'office invariante. L'axiome de Rosser : "$\forall n \in \mathbb{N} \quad Tn = n$" (non stratifiée !) est également invariant. Une extension de NF est dite invariante si tous ses axiomes le sont. Le fait principal est le suivant : si T est une extension invariante de NF et si $T \vdash \varphi_p$ alors $Con(T) \to Con(T + \varphi)$. ($\varphi$ est une sentence ; "Con T" signifie "T est consistant"). En se basant sur ces faits, Henson prouve dans [4] : $Con(T) \Rightarrow Con(T$ + tout bon ordre strict fortement cantorien est contractable).

Par définition, une relation R est dite contractable (au sens de Mostowski) ssi $\exists t$ ensemble transitif tel que

$$< \text{dom } R, R > \,\cong\, < t, \in > .$$

Ce résultat de Henson peut s'étendre aux relations rigides : il suffit de remplacer dans la démonstration de Henson la structure des ordinaux (de bons ordres stricts) par la structure $< \Omega, E >$. La permutation utilisée est :

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} p(Ta) = \{b \in \Omega \mid b\ \mathcal{E}\ a\} \\ p(\{b \in \Omega \mid b\ \mathcal{E}\ a\}) = Ta \end{array}\right\} & \text{si } a \in \Omega \\ p(x) = x & \text{sinon} \end{cases} .$$

On voit aisément que si R est une relation rigide pointée fortement cantorienne, alors R est isomorphe à $seg_{\mathcal{E}} a$ (où $a = \mathcal{T}(R)$). De plus, a est tel que $\forall b \in Cl_{\mathcal{E}}(\{a\}) \quad Tb = b$.
Comme on peut étendre toute relation en une relation pointée, il suffit donc de montrer que "$\forall a \in \Omega \; (\forall b \in Cl_{\mathcal{E}}(\{a\}) \quad Tb = b \rightarrow seg_{\mathcal{E}}\, a$ est contractable)" est satisfaite dans l'interprétation "$\in_p$". C'est bien le cas, puisque :

$$b \in_p a \leftrightarrow b \in p(a) \leftrightarrow b \in p(Ta)$$
$$\leftrightarrow b \in \{b \mid b\ \mathcal{E}\ a\} \leftrightarrow b\ \mathcal{E}\ a$$

ce qui montre que dans l'interprétation "$\in_p$" la relation $\mathcal{E}$ devient effectivement l'appartenance (pour plus de détails, consulter : [1], [4], [5]).

Remarque.
En admettant la consistance de NF + l'axiome de Rosser, on voit qu'il existe des modèles de NF où une large classe de structures extensionnelles se contractent : les relations de cardinalité $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, etc... et celles de cardinalité $\aleph_1$, $\aleph_2$, ... sont en effet fortement cantoriennes dans ce cas.

E. Modèles du langage de Gödel-Bernays satisfaisant un axiome d'universalité.
Considérons l'extension suivante du langage de Gödel-Bernays :

1°) des variables minuscules "x, y, z, ..." désignant les ensembles.

2°) des variables majuscules "X, Y, Z, ..." désignant les classes.

3°) la relation d'appartenance "$\in$".

4°) le symbole fonctionnel "T".

5°) les symboles prédicatifs "I_k" (k = 0, 1, 2, ...).

Une formule φ de ce langage L sera dite T-stratifiée s'il est possible d'attribuer à chaque variable dans φ un niveau k (entier) de sorte que, en considérant que l'opération T fait montrer ce niveau d'une unité, les sous-formules de φ de la forme $t_1 = t_2$ et $t_1 \in t_2$ (où t_1, t_2 sont des termes construits à partir des variables et de l'opération T) sont telles que t_1 et t_2 se trouvent au même niveau.

Exemples : "$T^4X = T^3y$ et $y \in TX$" est stratifiée.

"$Tx = x$" n'est pas T-stratifiée.

La structure $< \Omega, E>$ permet de construire un modèle M pour le langage L :
Dans M :

- les <u>classes</u> seront interprétées par les éléments de $P\Omega$
- les <u>ensembles</u> seront interprétés par les éléments de $P\Omega$ qui sont codés dans $< \Omega, E >$
- l'appartenance "$\in$" est interprétée de la manière suivante (dans M) : "$X \in Y$" (où X et Y sont des éléments de $P\Omega$) signifiera que X est codé dans $< \Omega, E >$ et que $cod_E X \in Y$ (ici $\in$ est la "vraie" relation de NF). Remarquons que si X et Y sont codés (c'est-à-dire sont des <u>ensembles</u> dans M) "$X \in Y$" signifie exactement $(cod_E X)\ E\ (cod_E Y)$.
- TX est la partie suivante de Ω :

$$\{Ta \mid a \in X\} \quad .$$

- $I_k(X)$ signifiera $N_c(X) \leqslant N_c(USC^k(V))$.

Le modèle M est ainsi clairement défini.
Nous allons décrire ci-dessous une théorie R dont M est un modèle.
Les axiomes de R sont :

1) EXT
2) $(\exists Y \quad X \in Y) \leftrightarrow (\exists a \quad X = a)$
   <u>Définition</u> : "Ens(X)" est l'abréviation de "X est un ensemble" c'est-à-dire de "$\exists a \quad X = a$".
3) $\forall X\ \exists Y$ Y est la fermeture transitive de X.

Définition :

"Y est la fermeture transitive de X" signifie :

"Y est transitif et $X \subset Y$ et $\forall A$ transitif tel que $A \supset X$, on a $Y \subset A$".

Un tel Y est unique et sera noté FT(X).

4) $\mathrm{Ens}(X) \leftrightarrow I_2(\mathrm{FT}(X))$.

5) Schéma de compréhension pour les formules φ T-stratifiées :

$$\exists X \quad \forall t \ (t \in X \leftrightarrow \varphi) \ .$$

6) $TX = TY \leftrightarrow X = Y$.

7) $x \in Y \leftrightarrow Tx \in TY$.

8) $y \in \mathrm{FT}(TX) \rightarrow \exists z \quad y = Tz$.

9) $\forall X \quad I_o(X)$.

10) $I_k(X) \leftrightarrow I_{k+1}(TX) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

11) $I_{k+1}(X) \rightarrow I_k(X)$

12) $I_k(X)$ et $I_k(Y) \rightarrow I_k(X \cup Y)$

13) $I_k(X) \leftrightarrow I_k(X \cup \{t\})$

Remarque.

Les axiomes qui précèdent permettent de déduire : $\mathrm{Ens}(\phi)$.

En effet, il suffit d'appliquer l'axiome 4 en sachant que $T^2\phi = \phi$, $\mathrm{FT}(\phi) = \phi$, $I_o(\phi) \leftrightarrow I_2(T^2\phi)$.

On peut également montrer que, dès maintenant, on dispose des notions suivantes : singleton, paire, couple de Kuratowski, réunion, relation, fonction, injection. On peut donc définir la relation $\underset{c}{\leqslant}$: "$X \underset{c}{\leqslant} Y$" est une abréviation de : "$\exists F$ injection de X dans Y".

14) $(I_k(X)$ et $Y \underset{c}{\leqslant} X) \rightarrow I_k(Y) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

Remarque : Ceci permet de montrer :

$$(\mathrm{Ens}(X) \text{ et } Y \subset X) \rightarrow \mathrm{Ens}(Y).$$

En fait, la théorie R contient la théorie des ensembles de Zermelo, sans axiome de fondement et sans axiome de l'ensemble des parties.

15) $(\exists y \quad \mathrm{FT}(X) \underset{c}{\leqslant} T^k y) \rightarrow X$ est un T^k (c'est-à-dire $\exists Z \quad X = T^k Z$).

16) $I_k(\mathrm{FT}(y)) \rightarrow \exists z \quad T^2(\mathrm{FT}(y)) = T^k(z)$.

17) $\exists x \quad (\phi \in x$ et $\forall y \in x \quad y^+ \in x)$ (où $y^+ = y \cup \{y\}$).
(Cet axiome affirme l'existence de l'ordinal de Von Neumann ω).

18) $I_k(FT(A \times A)) \leftrightarrow I_k(FT(A))$.
(N.B. : $A \times A = \{< x,y > \mid x \in A$ et $y \in A\}$
où le couple utilisé est celui de Quine : la raison est explicitée plus loin).

19) Axiome d'universalité :
$\forall < a,r >$ structure rigide $\exists t$ transitif tel que $< a,r > \cong < t,\in >$.

20) $\exists x$ (x est un ordinal de Von Neumann et x n'est pas un T).

Commentaires.
Il n'est pas difficile de se convaincre du fait que M est effectivement un modèle de la théorie R (axiomes de 1 à 20).
Nous nous contenterons donc d'indiquer un minimum de détails permettant au lecteur d'effectuer cette vérification lui-même.

Les axiomes 1, 2, 3 sont satisfaits de manière évidente.

L'axiome 4 est la simple traduction du "lemme de codage".

Axiome 5 : si φ est T-stratifiée, alors la formule " $M \models \varphi$" est en fait (dans NF) une formule stratifiée. La classe $\{t \mid M \models \varphi(t)\}$ est donc un sous-ensemble de Ω.

Les axiomes 6, 7, 8 décrivent simplement les propriétés essentielles de l'opération T dans Ω.

Les axiomes de 9 à 14 sont clairement satisfaits dans M.

Axiome 15 : il suffit de montrer que si $\exists y \quad FT(X) \leqslant_c T^k y$ et $a \in X$, alors a est un T^k.
Démonstration : dom seg_E a s'injecte donc dans dom seg_E $T^k y$. Supposons que $a = T(R)$ et $y = T(S)$. Grâce au lemme fondamental 4, on sait donc

que dom $RUSC^2(R)$ (isomorphe à $seg_E\, a$) s'injecte dans dom $RUSC^2(RUSC^k(S))$ (isomorphe à $seg_E\, T^k y$). Par conséquent, dom R s'injecte dans $USC^k(V)$. Il en résulte que a est un T^k.

L'axiome 16 se vérifie dans M par des arguments analogues.

Comme Ω contient les ordinaux (de bons ordres stricts) l'axiome 17 est évident dans M.

Axiome 18 : Il suffit de montrer que si FT(A) (partie de Ω) s'injecte dans $USC^k(V)$, $FT(A \times A)$ (au sens de M) s'injecte encore dans $USC^k(V)$. L'utilisation du couple de Kuratowski pose des problèmes :
en effet : $FT(A \times A)$ au sens de M est la réunion de FT(A), de USC(A) (au sens de M), de $\{\{x,y\} | x \neq y,\ x,y \in A\}$ (au sens de M) et de $A \times A$ (au sens de M). Il est facile d'injecter chacune de ces parties de Ω dans $USC^k(V)$ (étant donnée une injection de FT(A) dans $USC^k(V)$), sauf l'ensemble des vraies paires (au sens de M) des éléments de A; cela ne pose pas de problème si l'on dispose d'un ordre total $<$ sur A : en effet, si f est l'injection de FT(A) dans $USC^k(V)$, on peut associer à $\{x,y\}_M$ le couple de Quine $< x,y >$ pour lequel $x < y$ et à ce couple l'élément de $USC^k(V)$ $\{\ldots \{< a,b >\} \ldots \}$(k parenthèses), où $f(x) = \{a\}^k$ et $f(y) = \{b\}^k$.
Mais rien ne permet d'affirmer qu'il existe toujours un tel ordre total. L'utilisation du couple de Quine permet de contourner cette difficulté. Il suffit d'analyser $FT(A' \times A')$ (où cette fois $A' \times A'$ est l'ensemble des couples de Quine (dans M) de $A' = A \cup \omega$) pour voir que si FT(A) s'injecte dans $USC^k(V)$, $FT(A \times A)$ s'injecte aussi dans $USC^k(V)$.

Remarque : $R \vdash Ens(a \times a)$.
En effet, $I_2(FT(a))$ est garanti par l'axiome 4 et donc l'axiome 18 fournit : $I_2(FT(a \times a))$ d'où il résulte $Ens(a \times a)$.

Axiome 19 : comme a est un ensemble dans M, la relation r est isomorphe à une relation de la forme $RUSC^2(S)$. Le type de cette dernière est donc : $\mathcal{T}(RUSC^2(S)) = T^2(\mathcal{T}(S)) = (seg_E\, \mathcal{T}(S))$ (on suppose r pointée; si elle ne l'est pas, on peut toujours l'étendre en une relation pointée).

Ceci montre que r est isomorphe à un segment de E.

Axiome 20 : résulte immédiatement du fait que dans NF, il existe un ordinal α qui n'est pas un T. Cet axiome permet de montrer, à partir de l'existence de ω, l'existence de ω_1, ω_2, ... (les ordinaux initiaux succédant à ω). Il est en effet aisé de montrer que pour chaque k = 0, 1, 2, ... on a : $T\omega_k = \omega_k$.

Si donc l'on dispose d'un ordinal α tel que $\nexists\beta \quad \alpha = T\beta$, il est clair qu'aucun des ω_k ne peut être ce α et que $\omega_k \underset{c}{<} \alpha$, ce qui garantit l'existence de ω_{k+1} .

Remarque.
On sait que $N_c(\Omega) \nleqslant N_c(USC^2(V))$ car sinon on aurait : $M \models I_2(V)$ et toute classe serait un ensemble, ce qui entraînerait le paradoxe de Russell.
$N_c(\Omega) \geqslant N_c(USC^2(V))$ est donc plausible.
C'est une forme très faible de l'axiome du choix.
L'axiome du choix "V est bien ordonné" est en effet équivalent à "$N_c(USC^2(V)) \leqslant N_c(NO)$" où NO est l'ensemble des ordinaux, contenu canoniquement dans Ω. L'axiome du choix étant réfutable dans NF (cf. [7]) on a donc $N_c(USC^2(V)) \nleqslant N_c(NO)$ mais il est possible que $N_c(USC^2(V)) \leqslant N_c(\Omega)$ soit cohérent avec NF (cette dernière sentence est d'ailleurs impliquée, dans NF, par : "V peut être muni d'une relation rigide") ; notons σ cette sentence.
Dans NF + σ, on pourrait considérer l'injection f de $USC^2(V)$ dans Ω et la partie $\cup$ de Ω correspondante : $\cup = f(USC^2(V))$. Dans le modèle M, cette classe spéciale $\cup$ permettrait de se passer des prédicats I_k pour $k \geqslant 2$, puisqu'on aurait :

$$M \models (I_{k+2}(X) \leftrightarrow X \underset{c}{\leqslant} T^k \cup).$$

F. Modèle d'une extension de la théorie de Zermelo (Z) dans une extension de NF.

Au point E, nous avons montré :

$$NF \vdash (M \models R)$$

où R contient Z sans fondement et sans axiome de l'ensemble des parties (mais avec l'axiome du produit cartésien); Z désigne la théorie des ensembles de Zermelo ([8]).

En renforçant légèrement NF, il est possible de "récupérer" l'axiome de l'ensemble des parties et de construire dans $< \Omega, E >$ un modèle de Z admettant T comme automorphisme.

Soit φ l'axiome suivant :
"$\exists$ f une fonction : $\mathbb{N} \to V$ telle que $f(0) = \aleph_0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) = 2^{f(n)}$".

La définition de "2^x" est celle de M. Crabbé :

$$2^{N_c(A)} = \begin{cases} N_c(B) & \text{si } N_c(PA) = N_c(USC(B)) \\ \phi & \text{si } N_c(PA) \not\leqslant N_c(USC(V)). \end{cases}$$

φ affirme que la suite $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ... existe et est infinie.
Dans NF + φ, on montre aisément que :

(1) $< \Omega, E > \models$ "$\exists$f injection de $\omega \to V$ telle que $f(0) = \omega$ et $\forall n \in \omega$ $f(n+1) = Pf(n)$"

et que

(2) $< \Omega, E > \models$ "$\forall n \in \omega \quad f(Tn) = Tf(n)$" (où f est la fonction définie en (1)).

Dès lors, sachant que $< \Omega, E > \models$ "$\forall n \in \omega \quad \exists m \in \omega \quad n = Tm$" (démonstration par induction), il est facile de déduire que chaque f(n) est un T^k (pour chaque k = 0, 1, 2, ...). Le modèle N peut alors se définir par :

$$N = \bigcup_{n \in \omega} \{y \mid FT(y) \leqslant_c f(n)\} .$$

(Remarquons que cette définition peut se faire dans $< \Omega, E >$; il est en effet clair que N est un ensemble dans M, c'est-à-dire est codée dans $< \Omega, E >$).
On vérifie aisément que T est un automorphisme de N. L'axiome d'universalité (19), vrai dans $< \Omega, E >$, passe à N : c'est dû essentiellement au fait que si $< a, r >$ est une structure rigide dans N, c'est encore

une structure rigide dans $< \Omega, E >$. N est en effet fermé pour l'opération "P" : si x est dans N, alors $x \in A_n$ pour un certain n, A_n étant $\{y | FT(y) \leq_c f(n)\}$; dès lors $FT(Px) = FT(x) \cup Px \leq_c f(n) \cup Px \leq_c f(n) \cup Pf(n) \leq_c f(n+1)$; comme f(n+1) est un T^2, Px sera donc encore un ensemble (de M) et se retrouvera dans A_{n+1} , donc dans N.

Des vérifications élémentaires permettent de se convaincre du fait que les autres axiomes de Z (sans fondement) sont bien satisfaites dans N.

On a donc montré :

$$NF + \varphi \vdash (N \models Z + \text{l'axiome d'universalité (19)}).$$

Remarque.

Il est bien connu que Con NF $\Rightarrow$ Con(NF + $\exists n \in \mathbb{N} \quad Tn \neq n$), c'est-à-dire Con NF $\Rightarrow$ Con(NF + $\neg\psi$) où ψ est l'axiome de Rosser.

On sait que NF $\vdash (\psi \Rightarrow \varphi)$ mais il est peu probable que NF $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi)$ (bien qu'on n'en ait pas la preuve).

Si nous admettons que NF $\nvdash (\varphi \Rightarrow \psi)$, alors, on a :

$$\mathrm{Con}(NF + \varphi + \neg\psi).$$

Dans NF + φ + $\neg\psi$, T est un automorphisme non trivial de N.

Références.

[1] Hinnion R., "Sur la théorie des ensembles de Quine", Thèse de doctorat (année 1974-1975), Université Libre de Bruxelles.

[2] Hinnion R., "Modèles de fragments de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel dans les New Foundations de Quine", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, tome 282, Série A, 1976, p. 1-3.

[3] Hinnion R., "Modèle constructible de la théorie des ensembles de Zermelo dans la théorie des types", Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, tome 31, 1979, p. 3-11.

[4] Henson, "Permutation methods applied to Quine's NF" J.S.L., 38, n° 1, mars 1973, p. 73.

[5] Hinnion R., "Trois résultats concernant les ensembles fortement cantoriens dans les New Foundations de Quine", C.R. Acad. Sc. Paris, tome 279, Série A, 1974, p. 41-44.

[6] Boffa M., "Forcing et négation de l'axiome de fondement", Académie Royale de Belgique, Mémoires de la Classe des Sciences, Collection in 8° - 2e série, T.XL - Fascicule 7 et dernier - 1972, p. 10 et 11.

[7] Specker, "The axiom of choice in Quine's New Foundations", Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 39, 1953, p. 972-974.

[8] Chang et Keisler, "Model Theory", North-Holland Publishing Company, 1973, p. 507-509.

4, Rue Elsenbosch,
5919 Hélécine (Belgique).