A PROPOS DE 2^{α}

Marcel CRABBÉ
(Université Catholique de Louvain)

1. Si α est un nombre cardinal, 2^{α} est en principe le cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal α. Cependant, une telle définition présente un inconvénient quand on la formule en théorie des types. Le type de l'ensemble des parties d'un ensemble donné est plus élevé que celui de l'ensemble en question. Il devient dès lors impossible de comparer α et 2^{α} tout en respectant la définition usuelle de fonction. Cela crée une série de difficultés. A titre d'exemple, signalons qu'on ne peut pas définir les ensembles de cardinaux fermés pour l'opération 2^{α}. Or de tels ensembles se révèlent capitaux dans les démonstrations de propriétés non triviales des cardinaux infinis, comme la négation de l'axiome du choix dans NF. Une modification de la définition s'impose afin de situer 2^{α} au même niveau que α.

C'est ainsi que E. Specker (5) définit 2^{α}, si α est le cardinal d'un ensemble de singletons x, non pas comme le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de x, mais comme le cardinal de l'ensemble des parties de la réunion de x. Cela se justifie parce que l'ensemble des singletons d'un ensemble x est du même type que l'ensemble des parties de x et que, de plus, il a, de l'extérieur, le même cardinal que x.

La définition de Specker, proposée, il est vrai, dans le cadre du système NF de Quine, n'est toutefois pas pleinement satisfaisante en théorie des types. Du fait qu'elle ne concerne que les cardinaux d'ensembles de singletons, elle n'est pas applicable aux cardinaux d'ensembles d'individus (de type 0). En sus, cette limitation n'est pas davantage indispensable quand on considère les ensembles de type supérieur. Comme nous le verrons, il existe une définition de 2^α situant ce cardinal au même niveau que α, qui est valable pour les ensembles d'individus et plus générale que celle de Specker tant en théorie des types que dans NF.

§2. Les notations et les concepts qui seront utilisés conviennent pour NF et également pour la théorie des types, à condition d'effacer l'ambiguïté de l'écriture en affectant les variables d'un indice de type approprié. Les types sont les naturels 0, 1, 2, ... Les éléments d'un ensemble de type k+1 sont de type k. Les objets de type 0 ou individus ne sont pas des ensembles. V désigne l'ensemble universel : $\{x|x = x\}$, Λ désigne l'ensemble vide. NC désigne l'ensemble des nombres cardinaux. Les lettres α, β et γ désigneront des nombres cardinaux. $|x|$ est le cardinal de x, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles équipotents à x. ν est le nombre cardinal de V. USC(x) est l'ensemble de tous les singletons de l'ensemble x. SC(x) est l'ensemble des parties de x. Les opérations USC et SC ont pour effet de hausser les types d'une unité, en ce sens que USC(x) et SC(x) ont pour type le successeur du type de x. L'opération T est définie par les conditions :

$$T|x| = |USC(x)| \qquad \text{et} \qquad Tx = \Lambda, \text{ si } x \notin NC.$$

Donc, $T\alpha$ est un cardinal d'un type plus élevé que α et $T\nu$ est $|USC(V)|$. L'opération "inverse" de T est définie comme suit :

$$T^{-1}\, T\alpha = \alpha \quad \text{et} \quad T^{-1}\, x = \Lambda\,, \text{ si x n'est pas un cardinal de la forme } T\alpha.$$

Nous en arrivons à la définition de 2^α :

$$2^{|x|} = T^{-1}|SC(x)| \text{ et } 2^x = \Lambda, \text{ si } x \notin NC.$$

<u>Proposition 1.</u>

P1. 2^α a le même type que α;

P2. $2^{|USC(x)|} = |SC(x)|$;

P3. $2^{|x|} \neq \Lambda$ ssi $|SC(x)| \leqslant T\nu$;

P4. $2^\alpha \neq \Lambda \rightarrow \alpha < 2^\alpha$;

P5. $2^{\alpha} \neq \Lambda \rightarrow 2^{T\alpha} = T2^{\alpha}$;

P6. $2^{\alpha} \neq \Lambda$ ssi $2^{T\alpha} \leqslant T\nu$.

§3. Pour éviter toute confusion, notons $Sp(\alpha)$ la notion correspondante à 2^{α} introduite par Specker, à savoir :

$$Sp(|USC(x)|) = |SC(x)| \qquad \text{et} \qquad Sp(x) = \Lambda\ ,$$

si x n'est pas un cardinal de la forme $T\alpha$.
Donc, $Sp(\alpha) \neq \Lambda$ ssi $\alpha \leqslant T\nu$. A l'exclusion de P3 et P6, les propriétés énoncées dans la proposition 1 restent valables quand on y remplace la notion 2^{α} par $Sp(\alpha)$. Comme conséquence de P2, nous obtenons la

Proposition 2.
$Sp(\alpha) \neq \Lambda \rightarrow 2^{\alpha} = Sp(\alpha)$.

En utilisant les résultats d'indépendance de l'hypothèse du continu relativement à ZF, on peut construire des modèles de la théorie des types avec axiome de l'infini dans lesquels il y a un α tel que $Sp(\alpha) = \Lambda$ alors que $2^{\alpha} \neq \Lambda$. Raisonnons, par exemple, dans ZF plus $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. La structure standard : $< \omega, P\omega, PP\omega, \ldots >$ est un modèle de la théorie des types. Soit x un ensemble de type 2 et de cardinal $\aleph_1$. Dans ce modèle, on vérifie que $\aleph_1 = |x| > T\nu = T\aleph_0 = \aleph_0$. Donc, $Sp(|x|) = \Lambda$. Mais $2^{|x|} = \nu$. Cela prouve la

Proposition 3.
La théorie des types avec axiome de l'infini reste cohérente si on y ajoute l'énoncé $\exists\alpha(Sp(\alpha) = \Lambda \wedge 2^{\alpha} \neq \Lambda)$.

Si on ajoute à la théorie des types avec axiome de l'infini l'hypothèse générale du continu, on démontre l'énoncé $\forall\alpha(Sp(\alpha) = 2^{\alpha})$. Donc, cet énoncé est indécidé en théorie des types avec axiome de l'infini.

§4. Dans ce paragraphe, nous montrons qu'on peut prouver dans NF qu'il y a un cardinal α qui est tel que $Sp(\alpha) = \Lambda$ bien que $2^{\alpha} \neq \Lambda$. Définissons le "logarithme en base 2 de α" comme étant le maximum des β tels que $2^{\beta} = \alpha$:

$$\log(\alpha) = \beta \text{ si } 2^{\beta} = \alpha \wedge \forall\gamma(2^{\gamma} = \alpha \rightarrow \beta \geqslant \gamma) \quad \text{et } \beta = \Lambda, \text{ sinon.}$$

On peut alors poser :

$$L(\alpha) = \cap \{x \mid \alpha \in x \wedge \forall\beta(\beta \in x \rightarrow \log(\beta) \in x)\}$$

$L(\alpha)$ est donc l'ensemble $\{\alpha, \log(\alpha), \log(\log(\alpha)), \ldots\}$.
$P(x)$ est l'énoncé "$L(|x|)$ a un nombre fini pair d'éléments".

Lemme.

1. $L(\alpha)$ est fini, pour tout α.
2. $P(x)$ est équivalent à $P(USC(x))$.

Démonstration.
1. Soit $H(\alpha)$ le nombre de Hartog de α, c'est-à-dire le plus petit aleph qui n'est pas inférieur ou égal à α ($H(\alpha)$ est Λ si tout aleph est inférieur ou égal à α). Sierpiński (4) a démontré que si $2^{2^{2^{\alpha}}}$ existe, $H(\alpha) < 2^{2^{2^{\alpha}}}$. Cette démonstration est reproductible dans la théorie des types et dans NF (Forster (1)).
Supposons que $L(\alpha)$ est infini. En ce cas, $\log(\log(\log(\alpha))) \neq \Lambda$ et l'ensemble $\{H(\beta) \mid \beta \in L(\alpha)\}$ possède un plus petit cardinal. Choisissons un γ dans $L(\alpha)$ tel que ce cardinal est $H(\gamma)$. γ est de la forme $\log(\cancel{\log(\log(\beta))})$,
$2^{2^{\beta}}$
pour un certain $\beta \in L(\alpha)$
Donc, $H(\gamma) \leqslant H(\beta)$, par le choix de γ et $H(\beta) < \gamma$, par le théorème de Sierpiński.

2. Une inspection minutieuse de la formule $P(x)$ montre qu'elle exprime que l'énoncé stratifié $P(V)$, ne mentionnant que les types 0, 1, 2, 3 et 4, est vrai dans la structure $< x, SC(x), \ldots, SC(SC(SC(SC(x)))) >$, laquelle est "isomorphe" à la structure $<USC(x), SC(USC(x)), \ldots, SC(SC(SC(SC(USC(x))))))>$. D'où le résultat.

Théorème.

NF $\vdash \log(\nu) \neq T\nu$.

Démonstration.

Si $\log(\nu) = T\nu$, alors $L(\nu) = L(T\nu) \cup \{\nu\}$.

Comme $L(\nu)$ est fini et que $\nu \notin L(T\nu)$, $L(\nu)$ n'a pas la même parité que $L(T\nu)$.

D'autre part, NF $\vdash P(x) \longleftrightarrow P(USC(x))$.

Donc, $P(V) \leftrightarrow P(USC(V))$. Contradiction !

Corollaire.

1. NF $\vdash \exists\alpha(Sp(\alpha) = \Lambda \wedge 2^{\alpha} \neq \Lambda)$,
   NF $\vdash \exists x(|x| \nleq T\nu \wedge |SC(x)| \leqslant T\nu)$.

2. NF $\vdash \exists\alpha(Sp(\alpha) = T\nu \wedge \alpha \nleq TT\nu)$ (Henson (2)).

Démonstration.

1. Sinon, $2^{\alpha} = \nu \rightarrow \alpha \leqslant T\nu$. Comme $2^{T\nu} = \nu$, on aurait $\log(\nu) = T\nu$, contrairement à ce qu'affirme le théorème.

2. Par le théorème, il existe un α tel que $\alpha \nleq T\nu$ bien que $2^{\alpha} = \nu$. Pour un tel α, on vérifie que $Sp(T\alpha) = 2^{T\alpha} = T\nu$ et $T\alpha \nleq TT\nu$.

Remarques.

1. Le corollaire 1 peut être amélioré. En adaptant une démonstration de Pétry (3), on peut, par exemple, montrer qu'il existe un α tel que $Sp(\alpha) = \Lambda$ et tel que l'ensemble : $\{\alpha, 2^{\alpha}, 2^{2^{\alpha}}, \ldots\}$ n'est pas fini cantorien.

2. Le principe sous-jacent à la définition de 2^{α} peut être utilisé pour définir convenablement l'exponentiation cardinale en théorie des types :

$$|x|^{|y|} = T^{-1}T^{-1}T^{-1}|x^{y}| \quad \text{et} \quad x^{y} = \Lambda \quad \text{si} \quad \{x,y\} \not\subseteq NC.$$

Références

(1) Forster T.E., "NF", Thèse, Université de Cambridge, 1975.

(2) Henson C.W., Type-raising operations on cardinal and ordinal numbers in Quine's "New-Foundations", The journal of symbolic logic, vol. 38 (1973), pp. 59-68.

(3) Pétry A., On cardinal numbers in Quine's New Foundations, in Set Theory and Hierarchy Theory V, Lecture Notes in Mathematics, vol. 619, Springer-Verlag, Berlin et New-York, 1977, pp. 242-250.

(4) Sierpiński W., L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix, Fundamenta mathematicae, vol. 34 (1947), pp. 1-5.

(5) Specker E., The axiom of choice in Quine's New-Foundations for mathematical logic, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America, vol. 39 (1953), pp. 972-975.

12, rue Chèvequeue,
5865 Walhain-S^{t}-Paul (Belgique).