ALGÈBRES DE BOOLE ATOMIQUES ET MODÈLES DE LA THÉORIE DES TYPES

Maurice BOFFA
(Université de Mons)

0. Soit TT la théorie des types basée sur les axiomes d'extensionalité et de compréhension. Si $M = \langle M_0, M_1, M_2, \ldots \rangle$ est un modèle de TT, alors M_{i+1} est fermé pour les opérations booléennes et comprend les singletons des éléments de M_i, c'est-à-dire que M_{i+1} est une algèbre de Boole atomique de parties de M_i.

Définition.
Une algèbre de Boole atomique B sera dite *saturée* lorsque chaque élément infini de B se décompose en deux parties infinies disjointes appartenant à B.

La méthode du "va-et-vient" de Cantor donne facilement la

Proposition 1.
Si B_1, B_2 sont deux algèbres de Boole atomiques infinies dénombrables saturées et si (pour i = 1, 2) a_i est un élément infini non cofini de B_i, alors $(B_1,a_1) \cong (B_2,a_2)$.

Il existe des algèbres de Boole atomiques infinies dénombrables non saturées (par exemple $B = \{a \subseteq \omega \mid a \text{ est fini ou cofini}\}$), mais toute algèbre de Boole atomique infinie dénombrable a une extension élémentaire dénombrable saturée (limite d'une chaîne élémentaire $B_0 \prec B_1 \prec \ldots \prec B_i \prec \ldots$ où B_0 est l'algèbre de départ et où B_{i+1} est une extension élémentaire dénombrable de B_i dans laquelle chaque élément infini de B_i se décompose en deux parties infinies disjointes). Par la Prop. 1 (et le théorème de

Löwenheim-Skolem) on voit donc que toutes les algèbres de Boole atomiques infinies sont élémentairement équivalentes.

1. Soit TT_k le fragment de TT limité aux k premiers types 0, 1, ..., k-1. Soit NF (resp. NF_k) la théorie obtenue en confondant tous les types dans TT (resp. TT_k). On ne sait pas si NF est consistant relativement à une théorie des ensembles plus classique (comme ZF). Grišin [5] a prouvé la consistance de NF_3 comme suit : on peut facilement obtenir un modèle infini dénombrable $< M_0 , M_1 , M_2 >$ de TT_3 dans lequel les algèbres de Boole M_1 et M_2 sont saturées, donc isomorphes; mais un isomorphisme $M_1 \to M_2$ induit une bijection $M_0 \to M_1$, ce qui permet de confondre les trois niveaux M_0 , M_1 , M_2 en un modèle de NF_3. Plus tard, Grišin [6] a montré que $NF = NF_4$. D'autre part, on peut introduire dans TT_3 un axiome de l'infini AI qui exprime que l'univers de type 1 est infini. A partir du fait que dans tout modèle $< M_0 , M_1 , M_2 >$ de $TT_3 + AI$ les algèbres de Boole M_1 et M_2 sont élémentairement équivalentes, on peut montrer que $NF_3 + AI$ est une extension conservatrice de $TT_3 + AI$ (voir [3]). Plus récemment, Pabion [7] a montré que $TT_3 + AI$ (donc aussi $NF_3 + AI$) est une extension conservatrice de l'arithmétique du second ordre PA_2. A partir d'un modèle quelconque $\mathcal{N} = < N, \mathcal{D} >$ de PA_2 (où $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}N$) il construit un modèle $< M_0 , M_1 , M_2 >$ de $TT_3 + AI$ tel que $M_0 = N$, $M_1 = \{X \in \mathcal{D} \mid X$ est borné ou coborné dans $N\}$ et dans lequel l'interprétation naturelle de l'arithmétique du second ordre redonne un modèle isomorphe à $\mathcal{N}$. Dans [2], on étend cette construction au cas $M_1 = B$ lorsque B est n'importe quelle algèbre de Boole atomique de parties de N supposée codée dans $\mathcal{N}$ (c'est-à-dire de la forme $B = \{X_n \mid n \in N\}$ où $X_n = \{m \in N \mid 2^m . 3^n \in X\}$ pour un certain $X \in \mathcal{D}$). De plus, cette construction est telle que si $\mathcal{N}$ est dénombrable et B saturée (cette dernière condition étant d'ailleurs toujours vérifiée lorsque $\mathcal{N}$ est non standard, c'est-à-dire lorsque N contient strictement $\mathbb{N}$) alors les algèbres de Boole M_1 et M_2 sont infinies dénombrables et saturées, donc isomorphes. Il en résulte que pour tout modèle dénombrable $\mathcal{N}$ de PA_2 il existe un modèle de $NF_3 + AI$ dans lequel l'interprétation naturelle de l'arithmétique du second ordre donne un modèle isomorphe à $\mathcal{N}$.

2. Voici une application de la Prop. 1 aux modèles de TT_4 :

Proposition 2. (Crabbé [4])
Pour tout modèle infini $M = \langle M_0, M_1, M_2, M_3 \rangle$ de TT_4 il existe une structure $N = \langle N_0, N_1, N_2, N_3 \rangle$ qui n'est *pas* un modèle de TT_4 et telle que $\langle N_0, N_1, N_2 \rangle \equiv \langle M_0, M_1, M_2 \rangle$ et $\langle N_1, N_2, N_3 \rangle \equiv \langle M_1, M_2, M_3 \rangle$.

Démonstration.
On peut supposer M infini dénombrable et M_2 saturée. Soient $a_2, b_2 \in M_2$ qu'on suppose chacun infini non cofini dans l'algèbre de Boole M_2. Par la Prop. 1 il existe un automorphisme α de M_2 qui envoie a_2 sur b_2. Notons également α la permutation de M_1 définie par αx_1 = l'élément de $\alpha\{x_1\}$. Soit N la structure obtenue en ne modifiant dans M que la relation d'appartenance entre les types 0 et 1 comme suit : $x_0 \in_N x_1 \leftrightarrow x_0 \in_M \alpha x_1$. En notant encore α l'identité sur M_0, on a l'isomorphisme $\langle N_0, N_1, N_2 \rangle \overset{\alpha}{\to} \langle M_0, M_1, M_2 \rangle$; d'autre part, $\langle N_1, N_2, N_3 \rangle$ coïncide avec $\langle M_1, M_2, M_3 \rangle$. Dans M, choisissons maintenant $a_2 = USC(V_1)$ et b_2 = un ultrafiltre principal (sur V_1). Dans N, a_2 est un ultrafiltre principal qui n'est pas équipotent à son complément, donc N n'est pas un modèle de TT_4.

Voici un résultat du même genre pour les modèles de NF_3 :

Proposition 3.
Soient
M un modèle de NF_3,
$\varphi(x_1)$ une formule 3-stratifiée (c'est-à-dire stratifiée avec les types 0, 1, 2) à une seule variable libre x_1 (de type 1),
$\psi(x_2)$ une formule 3-stratifiée à une seule variable libre x_2 (de type 2),
a,b des éléments de M supposés infinis non cofinis dans l'algèbre de Boole de M et tels que $M \models \varphi(a) \wedge \psi(b)$.
Alors il existe un modèle N de NF_3 vérifiant les mêmes énoncés 3-stratifiés que M ainsi que l'énoncé (4-stratifié) $(\exists x)(\varphi(x) \wedge \psi(x))$.

Démonstration.

On peut supposer que M est infini dénombrable et que son algèbre de Boole est saturée. Il existe alors un automorphisme α de cette algèbre de Boole qui envoie a sur b. Soit α_0 la permutation de M définie par $\alpha_0 x$ = l'élément de $\alpha\{x\}$. Dans M, on a :

$$x \in y \leftrightarrow \{x\} \subseteq y \leftrightarrow \alpha\{x\} \subseteq \alpha y \leftrightarrow \{\alpha_0 x\} \subseteq \alpha y \leftrightarrow \alpha_0 x \in \alpha y.$$

Soit N obtenu simplement en modifiant la relation d'appartenance de M comme suit : $x \in_N y \leftrightarrow x \in_M \alpha y$. On a :

$$N \models x \in y \leftrightarrow M \models x \in \alpha y \leftrightarrow M \models \alpha_0^{-1} x \in y .$$

Il en résulte (par induction sur Φ) que pour toute formule 3-stratifiée $\Phi(x_0, \ldots, x_1, \ldots, x_2, \ldots)$:

$$N \models \Phi(a_0,\ldots,a_1,\ldots,a_2,\ldots) \leftrightarrow M \models \Phi(\alpha_0^{-1} a_0,\ldots,a_1,\ldots,\alpha a_2,\ldots).$$

En particulier, N vérifie les mêmes énoncés 3-stratifiés que M et de plus $N \models \varphi(a) \wedge \psi(a)$.

Corollaire.

Pour tout modèle M de NF_3 il existe un modèle N de NF_3 qui vérifie les mêmes énoncés 3-stratifiés que M et tel que $N \models$ USC(V) est fini.[1]

(En effet, il existe un modèle $M_1 \equiv M$ qui comprend un élément a infini non cofini dans l'algèbre de Boole de M_1 tel que $M_1 \models$ a est fini).

En particulier, on retrouve le fait déjà connu qu'il n'existe pas de système d'axiomes 3-stratifiés (consistant) impliquant NF (voir [1]).

---

[1] Autrement dit, aucune extension (consistante) 3-stratifiée de NF_3 ne démontre l'énoncé (4-stratifié) "USC(V) est infini". Cet énoncé n'est donc pas démontrable dans NF_3 + "V est infini".

Références.

[1] Boffa M., On the axiomatization of NF, *Colloques Internationaux du C.N.R.S.*, N° 249 (1977), 157-159.

[2] ------- , Arithmetic and theory of types (preprint).

[3] Boffa M. et Crabbé M., Les théorèmes 3-stratifiés de NF_3, *C.R. Acad. Sc. Paris* 280 (1975), 1657-1658.

[4] Crabbé M., On the reduction of type theory (à paraître dans *Zeitschr. f. math. Logik u. Grundl. der Math.*)

[5] Grišin V., Consistency of a fragment of Quine's NF system, *Soviet Math. Dokl.* 10 (1969), 1387-1390.

[6] -------- , The equivalence of Quine's NF system to one of its fragments, *Nauchno-Tekhnicheskaya Informatsiya* (ser. 2) 1 (1972), 22-24 (en russe).

[7] Pabion J.F., TT_3I est équivalent à l'arithmétique du second ordre, *C.R. Acad. Sc. Paris* 290 (1980), 1117-1118.

49, rue Dupré,
1090 Bruxelles (Belgique).