FORCING ET SEMANTIQUE DE KRIPKE-JOYAL

Ce travail se propose de montrer par divers exemples comment la sémantique de Kripke-Joyal permet de rendre compte de certains forcings introduits dans le cadre de la théorie des modèles. Il comporte deux types d'applications : celles qui utilisent la topologie grossière et donc les préfaisceaux et celles qui nécessitent une analyse plus locale et se basent en conséquence sur des topologies non triviales. Dans tous ces cas, la sémantique de Kripke-Joyal apparaît comme une généralisation convenable de la notion de forcing.

1. Sémantique de Kripke-Joyal.

Dans ce paragraphe, nous introduisons les concepts qui seront utilisés dans la suite et fixons certaines notations. Quelques importantes propriétés seront citées sans démonstration.

1.1. Définitions et rappels.

Un *site* est une petite catégorie $\underline{C}$ possédant des limites à gauche finies munie d'une notion de recouvrement, i.e. pour chaque objet A de $\underline{C}$, on s'est donné une classe Cov(A) de familles de morphismes de $\underline{C}$ de but A telle que

a. $(id_A) \in Cov(A)$ (A se recouvre lui-même)

b. Si $(A_i \to A)_{i \in I} \in Cov(A)$ et $f : B \to A$

   Alors $(A_i \underset{A}{\times} B \to B)_{i \in I} \in Cov(B)$

c. Si $(A_i \to A)_{i \in I} \in Cov(A)$ et $(A_{ij} \to A_i)_{j \in J_i} \in Cov(A_i)$

   Alors $(A_{ij} \to A)_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}} \in Cov(A)$.

Si $F : \underline{C}^{op} \to \mathbb{E}ns$ est un foncteur, par le lemme de Yoneda, on identifie les ensembles FA et $Hom(\hat{A},F)$ où $\hat{A}$ est l'image de A par le prolongement de Yoneda. Aussi au lieu d'écrire $\alpha \in F\alpha$, on écrira souvent $\alpha : A \to F$. Dans cette formulation si $f : B \to A$ est un morphisme de la catégorie $\underline{C}$, $\alpha \circ f$ correspond à l'élément $Ff(\alpha)$ de FB.

Un *faisceau* sur un site $\underline{C}$ est un foncteur $F : \underline{C}^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ vérifiant les conditions de séparation et de recollement suivantes :

1. $\alpha, \beta \in F(A)$ et $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(A)$

   Si pour tout $i \in I$, $\alpha \circ f_i = \beta \circ f_i$

   Alors $\alpha = \beta$.

2. Soit $(A_i \xrightarrow{f_i} A)_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(A)$.

   Si $(\alpha_i)_{i \in I}$ est une famille telle que $\alpha_i \in F(A_i)$ et

   $\alpha_i \circ \pi_i = \alpha_j \circ \pi_j \qquad \forall i,j \in I$

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dr, "f_i"] & \\ A_i \times_A A_j \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"'] & & A, \\ & A_j \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

alors on trouve un α (nécessairement unique par 1) tel que

$$\alpha_i = \alpha \circ f_i \text{ pour tout } i \in I.$$

On note $Sh(\underline{C},J)$ la catégorie des faisceaux sur $\underline{C}$, J étant la topologie associée à la notion de recouvrement utilisée. Si J est la topologie grossière, on écrira plus simplement $\mathrm{Préf}(\underline{C})$. Si X est un espace topologique, la notion habituelle de recouvrement fait de l'espace des ouverts de X un site. En effet, les conditions (a-c) signifient respectivement :

- tout ouvert se recouvre lui-même,
- la restriction à un sous-ouvert d'un recouvrement est encore un recouvrement,
- si chaque U_i est recouvert par des U_{ij} et si la famille des U_i recouvre U, alors la famille des U_{ij} recouvre également U.

La notion de faisceau sur le site des ouverts de X correspond exactement à la définition de faisceau sur X classique [3].

Remarque.
Dans les définitions qui précèdent, la catégorie sous-jacente $\underline{C}$ du site considéré a été supposée petite. Cependant, il est parfois utile de lever cette restriction de petitesse, comme cela est signalé dans [4], au chapitre IV, remarque 1.3. En effet, dans le théorème de Giraud par exemple, on utilise une topologie canonique sur un topos non nécessairement petit. Dans la suite, nous rencontrerons une situation semblable (voir 2.2.2.).

1.2. Langage et interprétation.
Soit L un langage du premier ordre (éventuellement multi-sorte). Une *interprétation* M de L dans $Sh(\underline{C},J)$ est définie par la donnée

pour chaque sorte s, d'un faisceau Ms;

pour chaque symbole opérationnel $f : s_1 \dots s_n \to s$, d'un morphisme $Mf : Ms_1 \times \dots \times Ms_n \to Ms$ dans $Sh(\underline{C},J)$;

pour chaque symbole relationnel R de type $s_1 \dots s_n$ d'un sous-objet MR de $Ms_1 \times \dots \times Ms_n$.

Ces données permettent d'interpréter tout couple $(t,\overline{x})$ ou $(\varphi,\overline{x})$ où t,φ sont un terme et une formule dont les variables libres sont contenues dans la suite de variables sans répétition $\overline{x}$. Si $\overline{x}$ est une suite de n variables de sortes respectives $s_1 \dots s_n$, on écrira $M\overline{x}$ pour $Ms_1 \times \dots \times Ms_n$.
La prolongation de la définition de M pour les termes et formules se fait par induction sur leur longueur :

$M_{\overline{x}}(x_i) = M(x_i,\overline{x}) = p_i$, $i^{\text{ème}}$ projection de $M_{\overline{x}}$ vers Ms_i,

et $M_{\overline{x}}(f(t_1 \dots t_n)) = M(f(t_1 \dots t_n),\overline{x}) = Mf \circ \langle M_{\overline{x}}(t_1), \dots, M_{\overline{x}}(t_n)\rangle$.

$M_{\overline{x}}(R(t_1 \dots t_m))$ n'est autre que le produit fibré des morphismes

$$\begin{array}{ccc} & & MR \\ & & \downarrow \\ M\overline{x} & \xrightarrow{\langle M_{\overline{x}}(t_1), \dots, M_{\overline{x}}(t_n)\rangle} & Ms_1 \times \dots \times Ms_m. \end{array}$$

La structure de topos de la catégorie $Sh(\underline{C},J)$ permet d'interpréter tous les signes logiques $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Nous renvoyons le lecteur désireux de plus de détails aux ouvrages [12] et [6].

1.3. Forcing de Kripke-Joyal.
Le forcing de Kripke-Joyal, également appelé sémantique, est une relation qui lie les objets de la catégorie $\underline{C}$, considérés comme conditions, aux formu-

les du langage L donné par l'intermédiaire d'une interprétation M convenablement choisie.

Supposons une suite $\bar{x} = \langle x_1 \ldots x_n \rangle$ de variables fixée une fois pour toute. On définit $X \Vdash_{\bar{x}} \varphi\ [a_1 \ldots a_n]$ où $a_i : X \to Mx_i$ $(i=1,\ldots,n)$ par induction sur la longueur de φ.

- les Formules atomiques

  $X \Vdash \varphi\ [\bar{a}]$ ssi $\bar{a} \in M_{\bar{x}}(\varphi)(X)$.

- la Conjonction

  $X \Vdash \varphi \wedge \psi\ [\bar{a}]$ ssi $X \Vdash \varphi\ [\bar{a}]$ et $X \Vdash \psi\ [\bar{a}]$.

- la Disjonction

  $X \Vdash \varphi \vee \psi\ [\bar{a}]$ ssi il y a un recouvrement $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ tel que pour tout $i \in I$, on ait

  $X_i \Vdash \varphi\ [\bar{a} \circ f_i]$ ou $X_i \Vdash \psi\ [\bar{a} \circ f_i]$.

- l'Implication

  $X \Vdash \varphi \to \psi\ [\bar{a}]$ ssi pour tout $f : Y \to X$
  $Y \Vdash \varphi\ [\bar{a} \circ f]$ implique $Y \Vdash \psi\ [\bar{a} \circ f]$.

- la Négation

  $X \Vdash \neg\varphi\ [\bar{a}]$ ssi pour tout $f : Y \to X$,
  si $Y \Vdash \varphi\ [\bar{a} \circ f]$ alors $\phi \in \mathrm{Cov}(Y)$.

- la Quantification existentielle

  $X \Vdash \exists x\ \varphi(x)\ [\bar{a}]$ ssi il y a un recouvrement $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ et une famille $(b_i : X_i \to Mx)_{i\in I}$ vérifiant
  $X_i \Vdash \varphi\ [\bar{a} \circ f_i, b_i]$.

- la Quantification universelle

  $X \Vdash \forall x\ \varphi(x)\ [\bar{a}]$ ssi pour tout $f : Y \to X$ et tout $b : Y \to Mx$
  on a bien $Y \Vdash \varphi\ [\bar{a} \circ f, b]$.

Comme le montrent les définitions ci-dessus, la sémantique de Kripke-Joyal donne à la notion de vérité un caractère local. Ce dernier peut s'énoncer comme suit :

Proposition.

Soit un recouvrement $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_{i\in I}$ de X dans $\underline{C}$.

$X \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[\bar{a}]$ ssi pour tout i de I, $X_i \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[\bar{a} \circ f]$. ⊠

De plus, le forcing possède une propriété de fonctorialité, à savoir :

Proposition.

Si $X \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[\bar{a}]$

Alors pour tout $f : Y \to X$ morphisme de $\underline{C}$, on a encore

$Y \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[\bar{a} \circ f]$. ⊠

Ainsi, si la véracité d'une formule est établie sous une certaine condition, elle le restera pour toute condition "plus forte". Rappelons que dans ce cadre, on appelle *conditions* les objets de $\underline{C}$. On démontre facilement que $M_{\bar{X}}\,\varphi(X) = \{a_1 \ldots a_n \mid a_i \in M_{X_i}(X)\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ et $X \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[a_1 \ldots a_n]\}$, ce qui lie la validité d'une formule pour l'interprétation M au forcing. En effet, on dira que M est un *modèle* de φ, ce qui s'écrit $M \underset{X}{\models} \varphi$, ssi pour tous X et $\bar{a} : X \to M\bar{x}$, on a

$$X \underset{X}{\Vdash} \varphi\,[\bar{a}]$$

$$\text{ssi } M_{\bar{X}}\,\varphi = M\bar{x}.$$

Les détails des démonstrations des faits qui précèdent peuvent être trouvés dans [12].

2. Exemples utilisant la topologie grossière.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment, par la sémantique de Kripke-Joyal, quatre situations de forcing classique peuvent être regroupées dans un cadre catégorique en une seule notion de forcing. Dans ces situations, le caractère local qui fait l'originalité de la sémantique de Kripke-Joyal est absent. C'est la raison pour laquelle la topologie grossière y a été adoptée. Pour cette topologie, les seuls recouvrements admis sont les triviaux et tous les préfaisceaux sont des faisceaux.

Nous verrons plus loin comment certains forcings classiques donnent lieu à des topologies non triviales.

2.1. Forcing de Kripke.

Le forcing de Kripke [8] a été introduit par S. Kripke dans son étude de la sémantique intuitionniste. Nous ferons aussi référence à [10].

2.1.1. Rappel.

On se donne un quadruple $(H, R, \delta, \Vdash)$ où

- H est un ensemble (celui des états de connaissance),
- R une relation d'ordre partielle sur H,
- δ est une application de H dans les ensembles qui associe à chaque état $p \in H$ l'ensemble $\delta(p)$ des objets construits jusqu'à l'état p, de manière à ce que pRq implique $\delta(p) \subseteq \delta(q)$

et $\Vdash$ est une relation entre états de connaissance et formules.

Ces données sont de plus astreintes à vérifier pour tous $p,q \in H$ et tout n-uple $(a_1 \dots a_n) = \bar{a}$ d'éléments de $\bigcup_{p \in H} \delta(p)$

- $p \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ implique $\bar{a} \subseteq \delta(p)$.
- $p \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ et pRq impliquent $q \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ (fonctorialité).
- $p \Vdash \varphi \wedge \psi\,[\bar{a}]$ ssi $p \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ et $p \Vdash \psi\,[\bar{a}]$.
- $p \Vdash \varphi \vee \psi\,[\bar{a}]$ ssi $p \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ ou $p \Vdash \psi\,[\bar{a}]$.
- $p \Vdash \varphi \to \psi\,[\bar{a}]$ ssi pour tout q tel que pRq, $q \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$ implique $q \Vdash \psi\,[\bar{a}]$.
- $p \Vdash \neg\varphi\,[\bar{a}]$ ssi pour tout q tel que pRq on n'a pas $q \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$.
- $p \Vdash \exists x\, \varphi\,[\bar{a}]$ ssi il existe un $b \in \delta(p)$ tel que $p \Vdash \varphi\,[\bar{a},b]$.
- $p \Vdash \forall x\, \varphi\,[\bar{a}]$ ssi pour tout q tel que pRq et tout $b \in \delta(q)$ $q \Vdash \varphi\,[\bar{a},b]$.

Dans ce contexte, une formule $\varphi\,[\bar{a}]$ est valide si pour tout p tel que $\bar{a} \subseteq \delta(p)$ on a bien $p \Vdash \varphi\,[\bar{a}]$.

2.1.2. Nous allons voir que le forcing ainsi défini est un cas particulier de sémantique de Kripke-Joyal.

Comme site de base $\mathbb{H}$, prenons l'ensemble H préordonné par la relation R et muni de la topologie grossière. Ainsi il y a une flèche de p dans q ssi pRq.

L'application δ peut alors se comprendre comme un préfaisceau $\delta : \mathbb{H}^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ car $\delta(p)$ est inclus à $\delta(q)$ chaque fois que pRq c'est-à-dire ssi il y a une flèche de q vers p. On interprète alors le langage unisorte de la logique intuitionniste dans le topos des préfaisceaux ensemblistes sur $\mathbb{H}$.

L'unique sorte s'interprète par δ.
Si R est un symbole relationnel n-aire, on définit

$K(R)(p) = \{a_1 \ldots a_n \mid a_i \in \delta(p)$ et $p \Vdash R[a_1 \ldots a_n]\}$ et $K(R)$ est bien fonctoriel car pRq implique que $\delta(p)$ est inclus à $\delta(q)$ et que $p \Vdash R[a_1 \ldots a_n]$ entraîne $q \Vdash R[a_1 \ldots a_n]$.
Ceci termine la description de l'interprétation K.
Remarquons que dans le point 2.1. le forcing des formules atomiques n'a pas été défini. C'est pourquoi il a fallu définir K à l'aide de ce forcing.
Il y a une version de "modèles avec quantification" de Kripke [8] où pour tout symbole relationnel n-aire R et tout p de H, on se donne une partie $\overset{n}{\Phi}(R,p)$ de $\delta^n(p)$. Dans ce cas, on définira $KR(p) = \overset{n}{\Phi}(R,p)$ sans utiliser le forcing.
Il est bien clair que sur le site $\mathbb{H}$ la sémantique de Kripke-Joyal coïncide exactement avec le forcing de Kripke.

2.2. <u>Forcing infini de Robinson.</u>
Nous faisons référence pour les définitions au texte de Robinson [13].

2.2.1. Rappel.
Considérons un langage L du premier ordre ayant comme connecteurs $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ et Σ une classe de structures pour L.
On définit $M \Vdash \varphi\,[a_1 \ldots a_n]$ où M est une structure pour L et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de M par induction sur la longueur des formules φ :

φ atomique	$M \Vdash \varphi\,[a_1 \ldots a_n]$	ssi	$M \models \varphi\,[a_1 \ldots a_n]$.
$\varphi = \psi \wedge \chi$	$M \Vdash \psi \wedge \chi\,[a_1 \ldots a_n]$	ssi	$M \Vdash \psi\,[a_1 \ldots a_n]$ et $M \Vdash \chi\,[a_1 \ldots a_n]$.
$\varphi = \neg\psi$	$M \Vdash \neg\psi\,[a_1 \ldots a_n]$	ssi	$\forall N \supseteq M$ on n'a pas $N \Vdash \psi\,[a_1 \ldots a_n]$.
$\varphi = \exists x\,\psi(x)$	$M \Vdash \exists x\,\psi(x)\,[a_1 \ldots a_n]$	ssi	il y a un $b \in M$ tel que $M \Vdash \psi\,[a_1 \ldots a_n, b]$.

2.2.2. Regardons $(\Sigma, \subseteq)$ comme un préordre Σ.
Il y a un foncteur évident de Σ^{op} vers $\mathbb{E}$ns, c'est le foncteur ensemble sous-jacent noté $|-|$.
Comme Σ est une classe de structures pour L, il y a une interprétation i_M de L dans chaque M de Σ.

Munissons Σ de la topologie grossière; nous obtenons un site non nécessairement petit (voir remarque en 1.1.).
On définit alors l'interprétation $\mathbb{R}$ de L dans la catégorie des préfaisceaux sur Σ.
L'unique sorte s'interprète par $|-|$.
$\mathbb{R}\overset{n}{f}$ est le morphisme de $|-|^n$ vers $|-|$ défini au niveau M par $i_M(\overset{n}{f})$.
$\mathbb{R}(\overset{n}{R})$ est le sous-foncteur de $|-|^n$ défini au niveau M par $i_M(\overset{n}{R})$. A ce stade, il apparaît que la sémantique de Kripke-Joyal associée à l'interprétation $\mathbb{R}$ ainsi définie n'est autre que le forcing infini de Robinson.
En effet,

$$
\begin{aligned}
M \Vdash \overset{n}{R}[a_1 \dots a_n] \quad & \text{ssi} \quad (a_1 \dots a_n) \in \mathbb{R}(\overset{n}{R})(M) \\
& \text{ssi} \quad (a_1 \dots a_n) \in i_M(\overset{n}{R}) \\
& \text{ssi} \quad M \models \overset{n}{R}[a_1 \dots a_n] \\
& \text{ssi} \quad M \Vdash \overset{n}{R}[a_1 \dots a_n].
\end{aligned}
$$

Pour les autres connecteurs, tout se passe normalement, la topologie grossière ayant effacé le caractère local.

2.3. <u>Forcing de Keisler.</u>

Le forcing de Keisler [7] se présente lui-même comme une généralisation de certaines notions de forcing parmi lesquelles se trouvent celles de Robinson (forcing fini) et de Barwise.

2.3.1. Rappels.

Soit L un langage du premier ordre avec égalité et ayant $\vee$, $\neg$, $\exists$ pour connecteurs. (Les autres connecteurs sont des abréviations des trois connecteurs de base).
On construit $L_{\omega_1\omega}$ en permettant les disjonctions infinies dénombrables.
On dit que L_A est un *fragment* de $L_{\omega_1\omega}$ si les quatre points suivants sont vérifiés.
(1) $\varphi \in L$ implique $\varphi \in L_A$
(2) $\varphi(x) \in L_A$ implique $\neg\varphi(x)$ et $\exists x\, \varphi(x)$ dans L_A
(3) $\varphi(x) \in L_A$ et t un terme, alors $\varphi(t) \in L_A$
(4) $\varphi \in L_A$ implique que toute sous-formule de φ est dans L_A.

L_A est dénombrable par hypothèse.
Soit C un ensemble dénombrable de constantes et K le langage L enrichi des constantes de C.

Soit K_A le fragment de K obtenu en remplaçant dans une formule φ de L_A un ensemble fini de variables par des constantes de C.
On dira que $(P, \leqslant, f)$ est une *propriété de forcing* pour L si

(i) $(P, \leqslant)$ est un ordre partiel avec plus petit élément 0,

(ii) f est une fonction associant à chaque $p \in P$ un ensemble de formules atomiques closes de K,

(iii) si $p \leqslant q$, alors $f(p) \subseteq f(q)$,

(iv) si s,t sont des termes de K sans variables libres, alors
- $s=t \in f(p)$ entraîne $t=s \in f(q)$ pour un $q \geqslant p$
- $t=s$ et $\varphi(s) \in f(p)$ entraîne $\varphi(t) \in f(q)$ pour un $q \geqslant p$
- il y a un $c \in C$ et un $q \geqslant p$ tel que $c=t \in f(q)$.

On définit alors $p \Vdash \varphi$ pour une sentence de K_A :
- si φ est atomique, $p \Vdash \varphi$ ssi $\varphi \in f(p)$
- $p \Vdash \neg\varphi$ ssi $\forall q \geqslant p$ on n'a pas $q \Vdash \varphi$
- $p \Vdash \vee\Phi$ ssi il y a un $\varphi \in \Phi$ tel que $p \Vdash \varphi$
- $p \Vdash \exists x\, \varphi$ ssi il y a un $c \in C$ tel que $p \Vdash \varphi(c)$.

2.3.2. On se restreint au langage L finitaire. De L_C, obtenu en complétant L par les constantes de C, dans le topos des préfaisceaux sur le préordre $(P, \leqslant)^{op}$, on définit une interprétation $\mathbb{K}_0$ de la manière suivante :
- l'unique sorte a pour interprétation le préfaisceau constant CK_0 qui à chaque $p \in P$ fait correspondre l'ensemble des termes clos de L_C;
- l'opération $\mathbb{K}_0(\overset{n}{f})$ se définit par $\mathbb{K}_0(\overset{n}{f})(t_1 \ldots t_n) = \overset{n}{f}(t_1 \ldots t_n)$;
- quant au préfaisceau $\mathbb{K}_0(\overset{n}{R})$ sous-objet de $(CK_0)^n$, il est défini par $\mathbb{K}_0(\overset{n}{R})(p) = \{t_1 \ldots t_n \mid p \Vdash R(t_1 \ldots t_n)\}$;
- enfin chaque constante $c \in C$ donne lieu à une transformation naturelle $\mathbb{K}_0 c : 1 \to CK_0$ qui vaut au niveau p $(\mathbb{K}_0 c)_p(*) = c$.

A nouveau, il apparaît clairement que le forcing de Kripke-Joyal associé à $\mathbb{K}_0$ coïncide avec le forcing de Keisler. Etudions le cas des formules atomiques.
On sait que $p \Vdash R(t_1 \ldots t_n)[\phi]$ ssi le produit fibré du morphisme

$$1(p) \xrightarrow[\mathbb{K}_0(t \ \ldots \ t_n)_p]{} (CK_0)^n(p)$$ et de l'injection de $\mathbb{K}_0(\overset{n}{R})(p)$ dans $(CK_0)^n(p)$

est le plus grand sous-objet de $1(p)$, ou encore ssi $\langle t_1 \ldots t_n\rangle$ est élément de $\{t_1 \ldots t_n \mid p \Vdash R(t_1 \ldots t_n)\}$ et donc ssi $p \Vdash R(t_1 \ldots t_n)$.

2.3.3. Dans l'analyse qui précède, nous n'avons pas utilisé toute la puissance du forcing de Keisler. Une interprétation plus fine $\mathbb{K}_1$ peut être donnée comme suit.

On définit tout d'abord une relation d'équivalence sur les constantes de C :

$$c \sim d \qquad \text{ssi} \qquad \forall q \in P \quad \exists p \in P \quad p \geqslant q \text{ tel que } p \Vdash c = d.$$

Les conditions (iv) de propriété de forcing font bien de $\sim$ une équivalence. Si $c \sim d$ et $d \sim e$, on sait que $\forall q \in P$, $\exists p' \in P$ tel que $p' \Vdash c = d$; pour ce p', il y a un $p'' \geqslant p'$ tel que $p'' \Vdash d = e$. Donc, au niveau p'', les formules $c = d$ et $d = e$ sont forcées. En conséquence par (iv 2), il y a un $p \geqslant p'' \geqslant p' \geqslant q$ tel que $p \Vdash c = e$. La relation $\sim$ est donc transitive. Ceci entraîne son caractère réflexif; en effet $\forall q \in P \quad \exists p' \geqslant q$ tel que $p' \Vdash c = d$ (iv 3) et donc $\exists p'' \geqslant p'$ tel que $p'' \Vdash d = c$ (iv 1). Par transitivité, il y a un $p \geqslant q$ tel que $p \Vdash c = c$ (iv 2). La classe d'équivalence de c sera notée $\bar{c}$. On définit alors l'interprétation $\mathbb{K}_1$:

- l'unique sorte s'interprète comme le préfaisceau constant $C/_{\sim}$.
- la transformation naturelle $\mathbb{K}_1(\overset{n}{f})$ se définit à l'aide de (iv 3).
  $\mathbb{K}_1(\overset{n}{f})_p(\bar{c}_1 \ldots \bar{c}_n) = \bar{c}$ ou c est la constante dont l'existence est assurée par (iv 3) : $\exists q \geqslant p$ tel que $c \sim f(c_1 \ldots c_n)$. La classe $\bar{c}$ est indépendante des représentants $c_1 \ldots c_n$ choisis grâce à (iv 2).
- le sous-faisceau $\mathbb{K}_1(\overset{n}{R})$ de $(C/_{\sim})^n$ est caractérisé au niveau p par
  $\mathbb{K}_1(\overset{n}{R})(p) = \{\bar{c}_1 \ldots \bar{c}_n \mid \text{il existe } c_1 \in \bar{c}_1 \ldots c_n \in \bar{c}_n \text{ tels que } p \Vdash R(c_1 \ldots c_n)\}$. Le caractère fonctoriel de $\mathbb{K}_1(\overset{n}{R})$ dérive du caractère fonctoriel du forcing. Remarquons que contrairement à $C/_{\sim}$, $\mathbb{K}_1(\overset{n}{R})$ n'est pas un préfaisceau constant.
- à toute constante, on associe la transformation naturelle évidente
  $\mathbb{K}_1(c)_p(*) = \bar{c}$.

2.3.4. Un sous-ensemble $G \subseteq P$ est *générique* s'il satisfait aux trois conditions suivantes : 1. si $p \in G$ alors tout $q \leqslant p$ est dans G;
2. si $p,q \in G$ alors il y a un $r \in G$ avec $r \geqslant p$ et $r \geqslant q$;
3. pour toute sentence φ de K_A, il y a un $p \in G$ tel que $p \Vdash \varphi$ ou $p \Vdash \neg\varphi$.

Le modèle M (au sens habituel) est *engendré par l'ensemble générique* G si C s'interprète surjectivement dans M et pour toute sentence φ de K_A, s'il y a un $p \in G$ tel que $p \Vdash \varphi$, alors $M \models \varphi$.

Considérons le foncteur L restreignant les préfaisceaux sur $(P, \leqslant)^{op}$ au site (grossier) $(G, \leqslant)^{op}$.

La première condition de la définition d'ensemble générique fait de L un *foncteur logique*. Voyons, par exemple, le fait que L respecte Ω.

$$L\Omega_P(p) = \{\text{sous-objets de } \hat{p} : (P, \leqslant)^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}\} \text{ avec } p \in G$$
$$= \{\text{sous-objets de } \hat{p} : (G, \leqslant)^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}\} = \Omega_G(p).$$

La seconde égalité se justifie par l'égalité des ensembles $\{q \mid q \in P \text{ et } \hat{p}(q) \neq \phi\}$ et $\{q \mid q \in G \text{ et } \hat{p}(q) \neq \phi\}$ dans le cas où $p \in G$.

Le foncteur L permet donc de restreindre l'interprétation $\mathbb{K}_1$ décrite plus haut. On pose $\mathbb{K}_2 = L\,\mathbb{K}_1$.

On a le résultat suivant :

Tout ensemble générique G *engendre un modèle.*

Cela signifie qu'il y a un modèle canonique $\mathbf{M}$ tel que toute sentence forcée par un quelconque élément de G soit vraie dans $\mathbf{M}$. On identifie $\mathbf{M}$ avec $\mathbb{K}_2$ sauf pour l'interprétation des symboles relationnels. On pose $\mathbf{M}(\overset{n}{R})(p) =$
$= \{\overline{c}_1 \ldots \overline{c}_n \mid \text{il existe } c_1 \in \overline{c}_1 \ldots c_n \in \overline{c}_n \text{ et } q \in G \text{ tels que}$
$q \Vdash \overset{n}{R}(c_1 \ldots c_n)\}$. $\mathbf{M}(R)$ est donc constant. Il est bien clair alors que

$$\begin{array}{llll} \mathbf{M} \models \varphi & \text{ssi} \quad \forall p \in G & p \Vdash \varphi[\phi] & \text{(par définition)} \\ & \text{ssi} \quad \exists p \in G & p \Vdash \varphi[\phi] & \text{(car } \mathbf{M} \text{ est constant)} \\ & \text{ssi} \quad \exists p \in G & p \Vdash \varphi. & \end{array}$$

L'interprétation $\mathbf{M}$ construite est donc bien un modèle au sens annoncé.

2.4. Forcing ensembliste.

Dans ce point, nous considérerons brièvement le forcing ensembliste tel qu'il fut introduit par Cohen et repris par Shoenfield. Pour plus de détails, voir par exemple [9].

2.4.1. Rappels.

Soit M un modèle de ZF.

On se donne un ensemble C de M ordonné avec plus grand élément et on définit trois formules du langage de ZF : on écrit $a \in_p b$ pour $\exists q \geqslant p \; \langle a,q\rangle \in b$,
$p \Vdash a \in b$ pour $\exists c(c \in_p b \wedge p \Vdash a = c)$ et
$$p \Vdash a = b \text{ pour } \forall q \leqslant p \;\; \forall d[(d \in_q a \to \exists r \leqslant q(r \Vdash d \in b)) \wedge (d \in_q b \to \exists r \leqslant q\,(r \Vdash d \in a))].$$

On constate que ces définitions sont fonctorielles en p, c'est-à-dire
$q \leqslant p$ et $a \in_p b$ entraînent $a \in_q b$,
$q \leqslant p$ et $p \Vdash a \in b$ entraînent $q \Vdash a \in b$ et

$q \leqslant p$ et $p \Vdash a = b$ entraînent $q \Vdash a = b$.

2.4.2. Si on regarde $(C, \leqslant)$ comme un préordre muni de la topologie grossière, le forcing ensembliste peut également se décrire comme une sémantique de Kripke-Joyal. Il suffit pour cela de définir une interprétation S du langage de ZF dans les préfaisceaux sur $(C, \leqslant)$. L'unique sorte donne lieu au préfaisceau constant M. Les symboles $\in$ et $=$ ont pour interprétation respective au niveau p

$$S(\in)(p) = \{ab \mid p \Vdash a \in b\} \quad \text{et} \quad S(=)(p) = \{ab \mid p \Vdash a = b\}.$$

3. Le forcing faible de Robinson.

Dans son article [13] déjà cité plus haut, A. Robinson introduit une notion atténuée de forcing : le forcing faible. Nous allons voir que cette notion est liée à la topologie de la double négation.

3.1. Rappels.

Considérons un langage L et une classe Σ de structures pour L comme au point 2.2.1.

Soient φ une sentence de L et M une structure de Σ.

On dit que M *force faiblement* φ, ce qui se note $M \overset{*}{\Vdash} \varphi$, ssi il n'y a pas d'extension M' de M dans Σ telle que $M' \Vdash \neg\varphi$, sachant que le symbole $\Vdash$ est celui du forcing infini de Robinson défini en 2.2.1.

En explicitant d'avantage, on voit que $M \overset{*}{\Vdash} \varphi$ ssi pour toute extension M' de M dans Σ; il y a une extension M'' de M' dans Σ telle que $M'' \Vdash \varphi$, autrement dit ssi $M \Vdash \neg\neg\varphi$.

On voit donc apparaître naturellement la double négation dans la définition du forcing faible. Or il est bien connu (voir [6]) que la double négation est une topologie dans un topos. Nous allons voir que la sémantique de Kripke-Joyal associée à cette topologie permet de retrouver le forcing faible. Mais avant cela, rappellons rapidement quelques faits relatifs à la topologie de la double négation.

Si G est un préfaisceau sous-objet de F dans la catégorie $\text{Préf}(\underline{C})$ des préfaisceaux sur une catégorie $\underline{C}$, la fermeture de G dans F pour la double négation, notée $\neg\neg G$, se définit point par point comme suit :

$\neg\neg G(A) = \{x \in FA \mid$ pour tout $g : B \to A$ il existe un $h : C \to B$ tel que $F(g \circ h)(x) \in GC\}$.

On sait qu'il y a un foncteur "faisceau associé" $a : \text{Préf}(\underline{C}) \to \text{Sh}(\underline{C}, \neg\neg)$

exact à gauche. Si G est un sous-objet d'un faisceau F, il est facile de voir que aG n'est autre que $\neg\neg G$.

3.2. Soit $\mathbf{\Sigma}$ la catégorie de préordre associée à Σ (cfr. 2.2.2.). Nous allons définir une interprétation $\mathbb{R}^*$ de L dans Fais($\mathbf{\Sigma}$,$\neg\neg$), en prolongeant l'interprétation $\mathbb{R}$ de L dans Préf($\mathbf{\Sigma}$) par le foncteur "faisceau associé". Si φ est une sentence, on sait que $\mathbb{R}\varphi$ est un sous-objet du préfaisceau final qui est en fait un faisceau. Or comme $\mathbb{R}^*\varphi$ vaut a $\mathbb{R}\varphi$, par la remarque ci-dessus, on sait que $\mathbb{R}^*\varphi$ n'est autre que $\neg\neg\mathbb{R}\varphi$.
Mais alors la sémantique de Kripke-Joyal associée à l'interprétation $\mathbb{R}^*$ fournit la suite d'équivalence que voici :

$M \Vdash \varphi[\phi]$ ssi $\mathbb{R}^*(\varphi)(M)$ est non vide,
ssi $\neg\neg\mathbb{R}(\varphi)(M)$ est non vide,
ssi pour toute extension M' de M dans Σ, il y a une extension M'' de M' dans Σ telle que $\mathbb{R}(\varphi)(M'')$ soit non vide,
ssi pour toute extension M' de M dans Σ, il y a une extension M'' de M' dans Σ telle que $M'' \Vdash \varphi$
ssi $M \overset{*}{\Vdash} \varphi$.

Le résultat annoncé est donc établi.

4. Topos des ensembles valués par une algèbre de Heyting complète H.

Pour pouvoir étudier comment le forcing booléo-valué (voir [5], par exemple) peut rentrer dans le cadre d'une sémantique de Kripke-Joyal associée à une topologie non triviale, il nous semble nécessaire de faire quelques rappels concernant les catégories de faisceaux sur une algèbre de Heyting complète.

4.1. Théorème de Higgs.

Fixons une fois pour toute une algèbre de Heyting complète H. Cette algèbre de Heyting donne lieu à un préordre $\mathbf{H}$ sur lequel on peut définir la topologie canoniquement associée à la structure complète en disant qu'une famille $(h_i)_{i\in I}$ couvre $h \in H$ ssi $\bigvee_{i\in I} h_i = h$. Les axiomes de topologies étant trivialement vérifiés, on obtient le topos Sh($\mathbf{H}$).
Le théorème de Higgs fournit une autre description de cette catégorie de faisceaux.
On appelle *ensemble* H-*valué* les couples (X,δ) où X est un ensemble et $\delta : X \times X \to H$ une application ensembliste soumise aux conditions

- $\delta(xx') = \delta(x',x)$ (symétrie)
- $\delta(xx') \underset{H}{\wedge} \delta(x',x'') \leqslant \delta(x,x'')$ (transitivité).

Un *morphisme de* (X,δ) *vers* (Y,ε) est décrit par une application ensembliste $f : X \times Y \to H$ vérifiant

- $f(xy) \underset{H}{\wedge} \delta(xx') \leqslant f(x',y)$ (substitutivité en x)
- $f(xy) \underset{H}{\wedge} \varepsilon(yy') \leqslant f(x,y')$ (substitutivité en y)
- $f(xy) \underset{H}{\wedge} f(xy') \leqslant \varepsilon(yy')$ (fonctionalité)
- $\delta(xx) = \underset{y\in Y}{\vee} f(xy)$ (caractère partout défini).

Intuitivement, l'application δ peut se comprendre comme le domaine d'égalité. Ainsi $\delta(x,x')$ est le plus grand élément de H où x et x' sont égaux.
En particulier $\delta(xx)$ est le plus grand élément de H sur lequel x soit défini.
Semblablement, $f(x,y)$ se comprend alors comme le plus grand élément de H sur lequel y est l'image de x par f.
Si g est un morphisme de (Y,ε) vers (Z,β), la composée $g \circ f$ de (X,δ) vers (Z,β) est définie par $g \circ f(x,z) = \bigvee_{y\in Y} (f(xy) \underset{H}{\wedge} g(y,z))$. La composition ainsi définie admet δ comme neutre, ce qui fait de la collection des ensembles H-valués une catégorie notée $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$.
Le théorème suivant est un important résultat, dû à D. Higgs.

Théorème.

Les catégories $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ et $\mathrm{Sh}(\mathbb{H})$ sont équivalentes.

Voici une courte esquisse de la démonstration. (Pour plus de détails, se référer à [2] ou [11]).
Au faisceau F, on associe le couple (X,δ) où $X = \coprod_{h\in H} F(h)$ et $\delta(xx') =$
$= \bigvee\{h \mid \rho_h^k(x) = \rho_h^{k'}(x')\}$, c'est-à-dire que $\delta(xx')$ est le plus grand élément de H où les restrictions de x et x' coïncident. Dans l'autre sens, on fait correspondre au H-ensemble (X,δ) le faisceau associé au préfaisceau séparé P défini par $P(h) = \{\tilde{x}^h \in X \mid \delta(xx) \geqslant h\}$ sachant que $\tilde{x}^h = \{y \in X \mid \delta(x,y) \geqslant h\}$ est l'ensemble des éléments qui sont égaux à x au moins sur h.
Ceci décrit l'équivalence annoncée. ⊠

Il s'ensuit le

Corollaire.

$\mathbb{E}ns_H$ est un topos.

Pour plus de clarté, rendons explicite la structure de topos dont $\mathbb{E}ns_H$ est munie.

a. les produits fibrés.

Soient $f : (X,\delta) \to (Y,\varepsilon)$ et $g : (Z,\beta) \to (Y,\varepsilon)$ deux morphismes de $\mathbb{E}ns_H$. Leur produit fibré est le couple $(X \times Z,\alpha)$ où

$$\alpha((xz),(x'z')) = \delta(xx') \underset{H}{\wedge} \beta(zz') \underset{H}{\wedge} \bigvee_{y\in Y} (f(xy) \underset{H}{\wedge} g(zy)) \underset{H}{\wedge} \bigvee_{y\in Y} (f(x'y) \underset{H}{\wedge}$$
$$\underset{H}{\wedge} g(z',y)).$$

Les projections de $(X \times Z,\alpha)$ sur (X,δ) et (Z,β) sont claires.

b. la notion de sous-objet.

Le morphisme f est monomorphique ssi $f(xy) \underset{H}{\wedge} f(x',y) \leqslant \delta(xx')$. De plus, on a la proposition suivante, dont la démonstration sera esquissée :

Proposition.

Il y a bijection entre les sous-objets de (Y,ε) et les applications ensemblistes $s : Y \to H$ satisfaisant les deux inégalités

$s(y) \underset{H}{\wedge} \varepsilon(yy') \leqslant s(y')$ et $s(y) \leqslant \varepsilon(yy)$ dans H.

Esquisse de la démonstration.

* Soit $f : (X,\delta) \to (Y,\varepsilon)$ un monomorphisme de $\mathbb{E}ns_H$. On lui associe

  $s_f : Y \to H$ en posant $s_f(y) = \bigvee_{x\in X} f(xy)$.

* Soit $s : Y \to H$ une telle application. On lui fait correspondre

  $f_s : (X,\varepsilon) \to (Y,\varepsilon)$ où $\varepsilon(yy') = \varepsilon(yy') \underset{H}{\wedge} s(y)$ définie par

  $f_s(y,y') = \varepsilon(y,y')$.

Ceci fournit la bijection prévue. $\boxtimes$

c. l'objet Ω du topos $\mathbb{E}ns_H$.

Il n'est pas difficile de vérifier que l'objet classifiant les sous-objets dans $\mathbb{E}ns_H$ est $(H, \underset{H}{\leftrightarrow})$, sachant que $h \underset{H}{\leftrightarrow} h' = h \underset{H}{\to} h' \underset{H}{\wedge} h' \underset{H}{\to} h$.

Si $f : (X,\delta) \to (Y,\varepsilon)$ est un mono, il est classifié par

$$\varphi_f : (Y,\varepsilon) \to (H, \underset{H}{\leftrightarrow}),\ \varphi_f(y,h) = \bigvee_{x\in X} f(xy) \underset{H}{\leftrightarrow} h \underset{H}{\wedge} \varepsilon(y,y)$$
$$= s_f(xy) \underset{H}{\leftrightarrow} h \underset{H}{\wedge} \varepsilon(y,y).$$

4.2. Les objets complets de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$.

Nous allons considérer une certaine sous-catégorie de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ qui lui sera encore équivalente : celle des objets complets.

4.2.1. Définitions et propriétés.

Un *singleton* de (X,δ) est une application $s : X \to H$ répondant aux conditions

- $s(x) \underset{H}{\wedge} s(x') \leqslant \delta(xx')$ (injectivité)
- $s(x) \underset{H}{\wedge} \delta(xx') \leqslant s(x')$ (substitutivité).

Il est évident que tout élément a de X donne lieu à un singleton $\tilde{a}$ de (X,δ); il suffit de poser $\tilde{a}(x) = \delta(x,a)$.

La réciproque n'est pas en général satisfaite. On dira qu'un ensemble H-valué (X,δ) est *complet* s'il y a bijection entre ses éléments et ses singletons.

Proposition.

Tout ensemble H-*valué* (X,δ) *peut être complété et est isomorphe comme ensemble* H-*valué à son complété.*

Voici la construction de la complétion $(\hat{X},\hat{\delta})$ de (X,δ).

On définit $\hat{X} = \{s \mid s : X \to H \text{ singleton de } (X,\delta)\}$ et $\hat{\delta}(s,t) = \bigvee_{x\in X} (s(x) \underset{H}{\wedge} t(x))$; il est clair que $(\hat{X},\hat{\delta})$ est un H-ensemble. Voyons sa structure complète. Pour cela, calculons d'abord $\hat{\delta}(\tilde{a},s) = \bigvee_{x\in X} \tilde{a}(x) \underset{H}{\wedge} s(x) =$

$= \bigvee_{x\in X} \delta(x,a) \underset{H}{\wedge} s(x) = s(a)$ car $\delta(xa) \underset{H}{\wedge} s(x) \leqslant s(a)$ et $s(a) = s(a) \underset{H}{\wedge} \delta(aa) \leqslant$

$\leqslant \bigvee_{x\in X} s(x) \underset{H}{\wedge} \delta(x,a)$.

Si $\sigma : \hat{X} \to H$ est un singleton sur $(\hat{X},\hat{\delta})$, il s'agit maintenant de lui associer un élément $s_\sigma \in \hat{X}$ tel que $\tilde{s}_\sigma = \sigma$. On pose tout simplement $s_\sigma(x) = \sigma(\tilde{x})$, ce qui fournit le résultat attendu.

Enfin, nous allons exhiber un isomorphisme i de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ entre (X,δ) et $(\hat{X},\hat{\delta})$.

En tant qu'application ensembliste i a pour domaine $X \times \hat{X}$ et pour codomaine H. On pose $i(x,s) = s(x)$.

Cette définition satisfait les conditions imposées aux morphismes :

- $i(x,s) \underset{H}{\wedge} \delta(xx') \leqslant i(x',s)$

- $i(x,s) \underset{H}{\wedge} \hat{\delta}(s,t) = s(x) \underset{H}{\wedge} \bigvee_{x'\in X} (s(x') \underset{H}{\wedge} t(x')) = \bigvee_{x'\in X} (s(x) \underset{H}{\wedge} s(x') \underset{H}{\wedge} t(x))$

$$\leqslant \bigvee_{x'\in X} \delta(xx') \underset{H}{\wedge} t(x') \leqslant t(x) = i(x,t)$$

- $i(x,s) \underset{H}{\wedge} i(x,t) = s(x) \underset{H}{\wedge} t(x) \leqslant \bigvee_{x\in X} s(x) \underset{H}{\wedge} t(x) = \hat{\delta}(s,t)$

- $\delta(x,x) = \bigvee_{s\in \hat{X}} i(x,s)$ en effet

$$\bigvee_{s\in\hat{X}} i(x,s) = \bigvee_{s\in\hat{X}} s(x) = \bigvee_{s\in\hat{X}} \hat{\delta}(s,\tilde{x}) = \hat{\delta}(\tilde{x},\tilde{x}) = \tilde{x}(x) = \delta(x,x).$$

De plus, i vérifie les propriétés de mono et épimorphisme, à savoir

$$i(x,s) \underset{H}{\wedge} i(x',s) = s(x) \underset{H}{\wedge} s(x') \leqslant \delta(x,x') \text{ et}$$

$$\bigvee_{x\in X} i(x,s) = \bigvee_{x\in X} s(x) = \hat{\delta}(s,s).$$ ⊠

Soient (X,δ) et (Y,ε) deux objets de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$.
Une application ensembliste $f : X \to Y$ est (δ,ε)-*stricte* (resp. (δ,ε)-*totale*) si $\varepsilon(f(x), f(x)) \leqslant \delta(x,x)$ (resp. $\varepsilon(f(x), f(x)) = \delta(x,x)$). Cette application est (δ,ε)-*extensionnelle* si $\delta(x,x') \leqslant \varepsilon(f(x), f(x'))$. Nous noterons $\mathrm{Hom}_{(\delta,\varepsilon)}(X,Y)$ l'ensemble des applications (δ,ε)-totales et extensionnelles de X vers Y qui vérifie la

Proposition.

Si (Y,ε) est complet, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}_H}((X,\delta), (Y,\varepsilon)) \simeq \mathrm{Hom}_{(\delta,\varepsilon)}(X,Y)$.

Démonstration.

1. Soit $f : (X,\delta) \to (Y,\varepsilon)$ un morphisme de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$. On lui associe une famille indexée par X de singletons $f_x : Y \to H$ en posant simplement $f_x(y) = f(x,y)$. A chaque singleton f_x correspond un unique élément $\hat{f}_x$ de Y puisque Y est complet. Il y a donc une application $\hat{f} : X \to Y$ qui associe $\hat{f}_x$ à x. On voit facilement que $\hat{f}$ est bien un élément de $\mathrm{Hom}_{(\delta,\varepsilon)}(X,Y)$.

2. Si g est une application (δ,ε)-totale et extensionnelle, on lui associe $\hat{g} : X \times Y \to H;\ (x,y) \rightsquigarrow \varepsilon(f(x), g)$.

Les correspondances ainsi établies sont bien inverses l'une de l'autre. ⊠

4.2.2. Nouvelle description des faisceaux sur H.

Nous allons associer à chaque faisceau un H-ensemble complet. Soit F un faisceau. Notons $\mathbb{F}$ l'ensemble $\coprod_{h\in H} F(h)$ et définissons $E : \mathbb{F} \to H$ en posant $E(x) = h$ ssi $x \in F(h)$; l'application E décrit le domaine d'existence de chaque élément de $\mathbb{F}$. On construit aussi une restriction que l'on note $1 : \mathbb{F} \times H \to \mathbb{F}$ et qui associe à un couple (x,h) l'élément $x_{1h} = Ff(x)$ où f est l'unique morphisme du préordre H décrit par l'inégalité $h \underset{H}{\wedge} E(x) \leqslant E(x)$. Les propriétés de préfaisceaux de F impliquent que

$$x_{1E(x)} = x \qquad (1)$$

$$(x_{1h})_{1h'} = x_{1(h \underset{H}{\wedge} h')} \qquad (2)$$

$$E(x_{1h}) = Ex \underset{H}{\wedge} h \qquad (3).$$

Soient a, b deux éléments de $\mathbb{F}$.

On dit que b est *une extension* de a si $a = b_{1E(a)}$.

Une partie X de $\mathbb{F}$ est *compatible* si tout couple d'éléments x, x' de X satisfait l'égalité $x_{1Ex'} = x'_{1Ex}$.

L'*union* d'une partie X de $\mathbb{F}$ (si elle existe) est, par définition, la plus petite extension $\cup X$ de tous les éléments de X. $\cup X$ vérifie donc

$$\forall x \in X \qquad \cup X_{1Ex} = x$$

$$\text{si} \quad \forall x \in X \qquad b_{1Ex} = x \quad \text{alors} \quad b_{1E(\cup X)} = \cup X.$$

Si F est un faisceau, $(\mathbb{F}, E, 1)$ possède la propriété que tout sous-ensemble compatible de $\mathbb{F}$ a une union unique.

Ceci nous permet d'avancer une nouvelle définition de faisceau : un faisceau sur H est un triple $(X,E,1)$ où $E : X \to H$ et $1 : X \times H \to H$ sont des applications vérifiant (1), (2) et (3) et tel que toute partie compatible de X admet une union unique.

Cette nouvelle définition est bien équivalente à l'ancienne. Pour le voir, nous allons associer à tout faisceau (fonctoriel) un H-ensemble complet et à tout ensemble complet un triple satisfaisant la nouvelle définition.

L'équivalence se déduit alors du théorème de Higgs.

1. $(\mathbb{F},E,1)$ donne lieu au H-ensemble complet $(\mathbb{F},\delta)$ où $\delta(x,x') = {}$
   $= \bigvee\{h \mid x_{1h} = x'_{1h}\}$.

   $(\mathbb{F},\delta)$ est complet car si s est un singleton, la partie

$X = \{x_{1s(x)} \mid x \in \mathbb{F}\}$ est compatible et admet donc une union unique qui n'est autre que l'élément unique associé à s.

2. Si (X,δ) est un ensemble complet, on définit $E(x) = \delta(x,x)$ et x_{1h} comme l'unique élément associé au singleton $s : X \to H; x' \rightsquigarrow \delta(x,x') \underset{H}{\wedge} h$. Le triple $(X,E,1)$ ainsi défini est bien un faisceau.

5. Forcing Heytingo-valué.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier ce que devient la sémantique de Kripke-Joyal associée à Sh($\mathbb{H}$) dans le topos $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$. Or dans ce dernier topos, il y a une notion de forcing valué par H qui apparaît naturellement.
Nous verrons que ces deux définitions coïncident. L'application de ce résultat aux modèles booléo-valués du paragraphe 6 permettra alors de prouver que la sémantique de Kripke-Joyal rend également compte des langages de forcing tels qu'introduits par Jech, par exemple (voir [5]).

5.1. Traduction dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ de la sémantique de Kripke-Joyal sur Sh($\mathbb{H}$).

Soient L un langage multisorte du 1er ordre et M une interprétation de L dans Sh(H). Nous allons opérer la traduction dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ de la sémantique de Kripke-Joyal associée à cette situation.
Grâce au théorème de Higgs, l'interprétation M se transporte dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$. Continuons de l'appeler M.
Dans le point 4.2.2., on a remarqué que le H-ensemble associé à un faisceau est automatiquement complet.
L'interprétation M est donc *complète*, c'est-à-dire à valeur dans la sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$ constituée des objets complets. Considérons l'énoncé $p \underset{\mathbf{x}}{\Vdash} \varphi[\bar{a}]$.
Nous supposerons - et ceci sans perte de généralité - que cet énoncé a encore un sens s'il y a un $q \geqslant p$ tel que $\bar{a} \subseteq M\bar{x}(q)$. En effet, on se ramène à la situation décrite antérieurement en restreignant $\bar{a}$ à p.
En conséquence, si l'on note $(M\bar{x},\delta)$ l'interprétation de la suite $\bar{x}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}_H$, l'énoncé $p \Vdash \varphi[\bar{a}]$ aura un sens à la condition que la suite $\bar{a}$ d'éléments de $M\bar{x}$ soit définie au moins au-dessus de p, c'est-à-dire $p \leqslant \delta(\bar{a}\ \bar{a}) = E_{\bar{x}}(\bar{a})$ (domaine d'existence de la suite $\bar{a}$). Dire que $p \Vdash R(x)[a]$ signifie que la restriction de a à p est un élément de MR.
Si on regarde MR et Mx comme des H-ensembles, soit $i : (MR,\varepsilon) \to (Mx,\delta)$ le monomorphisme d'inclusion.

Le fait que la restriction de a à p soit un élément de $\mathbb{M}\mathbb{R}$ se traduit alors par l'existence dans $\mathbb{M}\mathbb{R}$ d'un élément b lui aussi défini au moins sur p ($\varepsilon(b,b) = E_R(b) \geqslant p$) et dont l'image par i coïncide avec a au-dessus de p, autrement dit $\forall \alpha \in \mathbb{M}x \quad \delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} p = i(b,\alpha) \underset{H}{\wedge} p$ car $\delta(a,-) \underset{H}{\wedge} p$ est le singleton associé à a restreint à p et $i(b,-) \underset{H}{\wedge} p$ est le singleton associé à l'image de b restreinte à p.

La traduction de la conjonction est claire. Voyons la disjonction. L'énoncé $p \Vdash \varphi \vee \psi[\bar{a}]$ signifie qu'il y a un recouvrement $(p_i)_{i\in I}$ de p (i.e. $\bigvee_{i\in I} p_i = p$) tel que $p_i \Vdash \varphi[\bar{a}]$ ou $p_i \Vdash \psi[\bar{a}]$.

La traduction se fait tout aussi facilement pour les autres connecteurs; ceci nous amène à la définition de

5.2. <u>Sémantique de Kripke-Joyal pour $\mathbb{E}ns_H$</u>.

Soit M une interprétation complète de L dans $\mathbb{E}ns_H$. Nous allons définir $p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi[\bar{a}]$ avec $\bar{a} \in \mathbb{M}\bar{x}$ et $E_{\bar{x}}(a) \geqslant p$ par induction sur la longueur de φ.

- formule atomique :

$$p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi[\bar{a}] \text{ ssi il y a un } b \in M_\varphi \text{ tel que}$$

  - $E_\varphi(b) \geqslant p$
  - $\forall \alpha \in \mathbb{M}\bar{x} \quad \delta_n(\bar{a},\alpha) \underset{H}{\wedge} p = i(b,\alpha) \underset{H}{\wedge} p.$

- conjonction :

$$p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi \wedge \psi[\bar{a}] \text{ ssi } p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi[\bar{a}] \text{ et } p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \psi[\bar{a}].$$

- disjonction :

$$p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi \vee \psi[\bar{a}] \text{ ssi il y a un recouvrement } (p_i)_{i\in I} \text{ de p pour lequel}$$

$$p_i \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi[\bar{a}] \text{ ou } p_i \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \psi[\bar{a}].$$

- implication :

$$p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi \to \psi[\bar{a}] \text{ ssi } \forall q \leqslant p \qquad q \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \varphi[\bar{a}] \text{ implique } q \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \psi[\bar{a}].$$

- quantificateur existentiel :

$$p \overset{KJ}{\underset{\bar{x}}{\Vdash}} \exists x\, \varphi(x)[\bar{a}] \text{ ssi il y a un recouvrement } (p_i)_{i\in I} \text{ de p et pour chaque}$$

i de I un $b_i \in Mx$ tel que $E_x(b_i) \geqslant p_i$ et

$$p_i \mathrel{\Vdash\!\!\!\frac{KJ}{\bar{x},x}} \varphi[\bar{a},b_i].$$

- quantificateur universel :

$p \overset{KJ}{\Vdash} \forall x\, \varphi(x)[\bar{a}]$ ssi pour tout $q \leqslant p$ et tout $b \in Mx$ tel que

$$E_x(b) \geqslant q \text{ on a } q \mathrel{\Vdash\!\!\!\frac{KJ}{\bar{x},x}} \varphi[\bar{a},b].$$

5.3. <u>Forcing Heytingo-valué</u>.

Considérons toujours une interprétation complète M d'un langage L du premier ordre dans $\mathbb{E}ns_H$. Nous allons associer à cette interprétation une notion de forcing et dans un stade ultérieur, constater qu'elle coïncide avec la sémantique de Kripke-Joyal définie en 5.2.

A tout couple $(\varphi,\bar{x})$ où $\bar{x}$ contient les variables libres de φ, M associe un sous-objet $M_{\bar{x}}\varphi$ de $M\bar{x}$ et donc une unique application notée $\|\varphi\|_H$: $M\bar{x} \to H$ qui classifie ce sous-objet dans $\mathbb{E}ns_H$, puisque $(H, \underset{H}{\leftrightarrow})$ est l'objet classifiant les sous-objets. On vérifie aisément la suite d'égalités suivante :

$\|\varphi \wedge \psi\|_H(a) = \|\varphi\|_H(a) \underset{H}{\wedge} \|\psi\|_H(a)$

$\|\varphi \vee \psi\|_H(a) = \|\varphi\|_H(a) \underset{H}{\vee} \|\psi\|_H(a)$

$\|\varphi \to \psi\|_H(a) = \|\varphi\|_H(a) \underset{H}{\to} \|\psi\|_H(a)$

$\|\neg\varphi\|_H(a) = \underset{H}{\neg} \|\varphi\|_H(a) = \|\varphi\|_H(a) \underset{H}{\to} 0_H$

$\|\exists x\, \varphi(x)\|(a) = \bigvee_{b \in Mx} \|\varphi\|_H(a,b)$

$\|\forall x\, \varphi(x)\|(a) = \bigwedge_{b \in Mx} (E_x(b) \underset{H}{\to} \|\varphi\|_H(a,b)) \underset{H}{\wedge} E(a).$

On définit alors le forcing Heytingo-valué comme suit :

$p \mathrel{\Vdash\!\!\!\frac{H}{\bar{x}}} \varphi[\bar{a}]$ où $\bar{a} \in M\bar{x}$ et $E_{\bar{x}}(\bar{a}) \geqslant p$

ssi $p \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a})$.

5.4. <u>Théorème de correspondance</u>.

La sémantique de Kripke-Joyal et le forcing Heytingo-valué coïncident.

La démonstration se fait par induction sur la longueur de φ.

Nous en indiquerons trois étapes essentielles.

1. Le cas des formules atomiques.

Pour fixer les idées, montrons que

$$p \overset{KJ}{\Vdash} R(x)[a] \quad \text{ssi} \quad p \overset{H}{\Vdash} R(x)[a].$$

1.a. Si $p \overset{KJ}{\Vdash} R(x)[a]$, on sait qu'il y a un $b \in Mx$ tel que $E_x(b) \geqslant p$ et $\forall\alpha \in Mx$, $\delta(\alpha,a) \underset{H}{\wedge} p = i(b,\alpha) \underset{H}{\wedge} p$. Mais alors

$$p = p \underset{H}{\wedge} \delta(a,a) = p \underset{H}{\wedge} i(b,a) \leqslant i(b,a) \leqslant \bigvee_{\beta} i(\beta,a) = \| R(x) \|_H(a)$$

si on se souvient que le morphisme classifiant un mono i est donné par $\bigvee_{\beta} i(\beta,-)$ (cfr. 3.1.c.)

1.b. Si $p \overset{H}{\Vdash} R(x)[a]$, on sait que $p \leqslant \| R(x) \|_H(a)$. Il s'agit de trouver un $b \in M$ dont l'image par i soit a au moins au-dessus de p. Puisque i est un mono, l'application $t : MR \to H$ qui associe $i(\beta,a)$ à β est un singleton. La complétude de MR assure alors l'existence d'un unique élément représentant ce singleton t, c'est le point b cherché. En effet

(*) $E_R(b) = \hat{\varepsilon}(t,t) = \bigvee_{\beta} i(\beta,a) = \| R(x) \|_H(a) \geqslant p$ par hypothèse.

De plus, comme MR et Mx sont complets, ils sont isomorphes à leur complétion et le diagramme

$$\begin{tikzcd} (MR,\varepsilon) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, tail, "i"] & (\widehat{MR},\hat{\varepsilon}) \arrow[d, "\hat{\imath}"] \\ (Mx,\delta) \arrow[r, "\sim"] & (\widehat{Mx},\hat{\delta}) \end{tikzcd}$$

commute, sachant que

$\hat{\imath} : \widehat{MR} \to \widehat{Mx}$ est l'application $(\hat{\varepsilon},\hat{\delta})$-totale et extensionnelle (3.2.1.) qui au singleton s sur (MR,ε) associe le singleton $\hat{\imath}(s)$ sur (Mx,δ) défini par $\hat{\imath}(s)(\alpha) = \bigvee_{\beta} (i(\beta,\alpha) \underset{H}{\wedge} s(\beta))$.

La condition $i(b,\alpha) \underset{H}{\wedge} p = \delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} p$ pour tout α revient donc à $\hat{\imath}(t)(\alpha) \underset{H}{\wedge} p = \delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} p$ puisque b est déterminée entièrement par le singleton t.

Or $\bigvee_{\beta} (i(\beta,\alpha) \underset{H}{\wedge} i(\beta,a)) \leqslant \delta(a,\alpha)$ et donc

$$\bigvee_{\beta} (i(\beta,\alpha) \underset{H}{\wedge} i(\beta,a)) \underset{H}{\wedge} p \leqslant \delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} p.$$

De plus $\delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} p \leqslant \delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} \bigvee_{\beta} i(\beta,a)$ (par (*) (hypothèse)

$$= \bigvee_{\beta} (\delta(a,\alpha) \underset{H}{\wedge} i(\beta,a)) \leqslant \bigvee_{\beta} (i(\beta,a) \underset{H}{\wedge} i(\beta,a)).$$

L'égalité attendue est donc vérifiée et les notions coïncident au niveau atomique.

2. Le cas des formules disjonctives.

2.a. Supposons $p \overset{KJ}{\Vdash} \varphi \vee \psi[\bar{a}]$.

On sait donc qu'il y a un recouvrement $(p_i)_{i\in I}$ de p tel que $p_i \overset{KJ}{\Vdash} \varphi[\bar{a}]$ ou $p_i \overset{KJ}{\Vdash} \psi[\bar{a}]$.

En conséquence, par l'hypothèse d'induction, pour ce recouvrement on a $p_i \overset{H}{\Vdash} \varphi[\bar{a}]$ ou $p_i \overset{H}{\Vdash} \psi[\bar{a}]$, c'est-à-dire $p_i \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a})$ ou $p_i \leqslant \|\psi\|_H(\bar{a})$.

Il est donc clair que pour tout i de I $p_i \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a}) \underset{H}{\vee} \|\psi\|_H(\bar{a}) = \|\varphi \vee \psi\|_H(\bar{a})$. En passant au supremum, on obtient la thèse à savoir $p = \bigvee_i p_i \leqslant \|\varphi \vee \psi\|_H(\bar{a})$.

2.b. Supposons $p \overset{H}{\Vdash} \varphi \vee \psi[\bar{a}]$.

On sait donc que $p \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a}) \underset{H}{\vee} \|\psi\|_H(\bar{a})$. Il est bien clair alors que $(p \underset{H}{\wedge} \|\varphi\|_H(\bar{a}), p \underset{H}{\wedge} \|\psi\|_H(\bar{a}))$ constitue un recouvrement de p pour lequel, par induction, la condition cherchée est satisfaite.

3. Le cas des formules universelles.

3.a. Supposons $p \overset{KJ}{\Vdash} \forall x\, \varphi(x)[\bar{a}]$.

On sait, par définition, que pour tout $q \leqslant p$ et tout $b \in Mx$ tel que $E_x(b) \geqslant q$ on a $q \overset{KJ}{\Vdash} \varphi[\bar{a},b]$ ou encore, par induction

$$q \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a},b).$$

Pour un $b \in Mx$ quelconque, prenons $q = p \underset{H}{\wedge} E_x(b) \leqslant E_x(b)$.

On a donc $p \underset{H}{\wedge} E_x(b) \leqslant \|\varphi\|_H(\bar{a},b)$ d'où

$$p \leqslant E_x(b) \underset{H}{\rightarrow} \|\varphi\|_H(\bar{a},b).$$

Cette inégalité étant valable pour tout $b \in Mx$ et p étant inférieur à $E_{\overline{x}}(\overline{a})$, il est clair que

$$p \leqslant \bigwedge_{b \in Mx} (E_x(b) \underset{H}{\rightarrow} \|\varphi\|_H(\overline{a},b)) \underset{H}{\wedge} E_{\overline{x}}(\overline{a}) = \|\forall x\ \varphi(x)\|_H(\overline{a}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

3.b. Supposons $p \overset{H}{\Vdash} \forall x\ \varphi(x)[\overline{a}]$. On sait, comme on vient de le voir, que $p \leqslant \bigwedge_{b \in Mx} (E_x(b) \underset{H}{\rightarrow} \|\varphi\|_H(\overline{a},b))$ et donc pour tout b

$p \underset{H}{\wedge} E_x(b) \leqslant \|\varphi\|_H(\overline{a},b)$ ce qui entraîne par induction

$p \underset{H}{\wedge} E_x(b) \overset{KJ}{\Vdash} \varphi[\overline{a},b]$.

Mais alors pour tout $q \leqslant p$ et tout $b \in Mx$ tel que $q \leqslant E_x(b)$, il est clair que $q \leqslant p \underset{H}{\wedge} E_x(b)$; donc par fonctorialité du forcing

$q \overset{KJ}{\Vdash} \varphi[\overline{a},b]$. Ceci achève la démonstration. ⊠

6. Les modèles booléo-valués de ZF et la sémantique de Kripke-Joyal.

6.1. Rappel (voir par exemple Jech [5]).

Considérons un ensemble M, modèle transitif de ZF. On peut considérer M comme un univers au sens de Bourbaki [4, annexe à l'exposé I]. Nous noterons $\mathbb{E}\mathrm{ns}(M)$ la catégorie des ensembles engendrée par l'univers M. Cette catégorie a pour objet les ensembles de M et pour morphismes les applications ensemblistes décrites à l'intérieur de M.

Considérons de plus une notion de forcing $(P, \leqslant)$ pour M. L'ensemble P engendre une algèbre de Boole B de M dont les éléments sont les ouverts réguliers de P. Cette algèbre de Boole est complète et P s'y plonge par une application de M notée e et définie par $e(p) = \{q \mid q \leqslant p\}$.

On définit alors $M^{(B)}$, classe des ensembles booléens, de la manière suivante :

$M_0^{(B)} = \phi$, $M_{\alpha+1}^{(B)} = \{x \in M \mid x$ est une fonction de domaine inclus à $M_\alpha^{(B)}$ et à valeurs dans $B\}$, ... $M_\alpha^{(B)} = \bigcup_{\beta \in \alpha} M_\beta^{(B)}$ si α est un ordinal limite de M et finalement

$$M^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in M} M_\alpha^{(B)}.$$

Il est clair que $M^{(B)}$ n'est plus un ensemble de M - bien qu'à chaque niveau α, $M_\alpha^{(B)}$ le soit. Cependant, l'axiome des univers nous permet de considérer

un univers U qui contienne tous les éléments de M et $M^{(B)}$ comme éléments. Si x est un élément de $M^{(B)}$, on définit $\rho(x)$ - le rang de x - comme étant le plus petit ordinal α de M tel que $x \in M^{(B)}_{\alpha+1}$.
Par induction sur le rang, on peut alors définir l'interprétation booléenne des formules atomiques $a \in b$ et $a = b$ où a et b sont des éléments de $M^{(B)}$.

$$[\![a \in b]\!] = \bigvee_{z \in \mathrm{dom}\, b} b(z) \underset{B}{\wedge} [\![a = z]\!] ,$$

$$[\![a \subseteq b]\!] = \bigwedge_{z \in \mathrm{dom}\, a} (a(z) \underset{B}{\rightarrow} [\![z = b]\!]) ,$$

$$[\![a = b]\!] = [\![a \subseteq b]\!] \underset{B}{\wedge} [\![b \subseteq a]\!].$$

On vérifie alors que $[\![a = a]\!] = 1_B$

$$[\![a = b]\!] = [\![b = a]\!]$$

$$[\![a = b]\!] \underset{B}{\wedge} [\![b = c]\!] \leqslant [\![a = c]\!]$$

$$[\![a \in b]\!] \underset{B}{\wedge} [\![a = a']\!] \underset{B}{\wedge} [\![b = b']\!] \leqslant [\![a' \in b']\!].$$

L'interprétation booléenne $[\![-]\!]$ s'étend naturellement à la collection de toutes les formules. On procède comme suit :

$$[\![\varphi \wedge \psi(a_1 \dots a_n)]\!] = [\![\varphi(a_1 \dots a_n)]\!] \underset{B}{\wedge} [\![\psi(a_1 \dots a_n)]\!] ,$$

$$[\![\varphi \vee \psi(a_1 \dots a_n)]\!] = [\![\varphi(a_1 \dots a_n)]\!] \underset{B}{\vee} [\![\psi(a_1 \dots a_n)]\!] ,$$

$$[\![\varphi \rightarrow \psi(a_1 \dots a_n)]\!] = [\![\varphi(a_1 \dots a_n)]\!] \underset{B}{\rightarrow} [\![\psi(a_1 \dots a_n)]\!] ,$$

$$[\![\neg \varphi (a_1 \dots a_n)]\!] = \underset{B}{\neg} [\![\varphi(a_1 \dots a_n)]\!] ,$$

$$[\![\exists x\ \varphi(x)(a_1 \dots a_n)]\!] = \bigvee_{a \in M^{(B)}} [\![\varphi(a, a_1 \dots a_n)]\!] ,$$

$$[\![\forall x\ \varphi(x)(a_1 \dots a_n)]\!] = \bigwedge_{a \in M^{(B)}} [\![\varphi(a, a_1 \dots a_n)]\!].$$

Ceci étant fait, on associe à l'interprétation $[\![-]\!]$ le forcing défini par

$$p \Vdash \varphi(a_1 \dots a_n) \quad \text{ssi} \quad e(p) \leqslant [\![\varphi(a_1 \dots a_n)]\!].$$

6.2. On sait par ailleurs (voir [1]) que
$\mathbb{E}\mathrm{ns}(M)_B$ est équivalente à $\mathbb{E}\mathrm{ns}(M^{(B)})$.

Malheureusement, $M^{(B)}$ ne peut être considéré comme un "ensemble" B-valué de $\mathbb{E}\mathrm{ns}(M)_B$. Il faut donc élargir cette catégorie. Pour cela, prenons $\mathbb{E}\mathrm{ns}(U)_B$.

Nous allons montrer que l'interprétation booléenne $[\![-]\!]$ donne lieu à une interprétation catégorique dans $\mathbb{E}ns(\mathbb{U})_B$, ce qui permet de décrire le forcing associé à $[\![-]\!]$ comme un forcing heytingo-valué sur B au sens de (5.3.) et donc comme une sémantique de Kripke-Joyal par (5.4.).

Tout d'abord, décrivons l'interprétation du langage de ZF associée à $[\![-]\!]$ dans $\mathbb{E}ns(\mathbb{U})_B$.

L'unique sorte aura pour réalisation $M^{(B)}$ lui-même avec la valuation δ définie par $\delta(a,b) = [\![a = b]\!]$. Les propriétés énoncées plus haut font bien de $(M^{(B)},\delta)$ un ensemble B-valué dans l'univers $\mathbb{U}$.

L'égalité s'interprète comme le sous-objet de $M^{(B)} \times M^{(B)}$ associé à δ par la proposition 4.1.b. De même, l'interprétation du symbole $\in$ est donnée par le sous-objet décrit par l'application $E : M^{(B)} \times M^{(B)} \to B$ telle que $E(a,b) = [\![a \in b]\!]$.

Le forcing heytingo valué sur B associé à cette interprétation est :

$$h \overset{H}{\Vdash} x = y[a,b] \quad \text{ssi} \quad h \leqslant [\![a = b]\!]$$

$$h \overset{H}{\Vdash} x \in y[a,b] \quad \text{ssi} \quad h \leqslant [\![a \in b]\!]$$

$$h \overset{H}{\Vdash} \varphi \wedge \psi[a_1 \ldots a_n] \quad \text{ssi} \quad h \leqslant [\![\varphi(a_1 \ldots a_n)]\!] \underset{B}{\wedge} [\![\psi(a_1 \ldots a_n)]\!]_B,$$

et ainsi de suite pour les connecteurs $\vee$, $\to$, $\neg$,

$$h \overset{H}{\Vdash} \exists x\ \varphi(x)[a_1 \ldots a_n] \quad \text{ssi} \quad h \leqslant \bigvee_{a \in M^{(B)}} [\![\varphi(a, a_1 \ldots a_n)]\!],$$

$$h \overset{H}{\Vdash} \forall x\ \varphi(x)[a_1 \ldots a_n] \quad \text{ssi} \quad h \leqslant \bigwedge_{a \in M^{(B)}} ([\![a = a]\!] \underset{B}{\to} [\![\varphi(a, a_1 \ldots a_n)]\!])$$

$$\leqslant \bigwedge_{a \in M^{(B)}} [\![\varphi(a, a_1 \ldots a_n)]\!] \text{ car } [\![a=a]\!] = 1_B.$$

En particulier, $p \Vdash \varphi(a_1 \ldots a_n)$ ssi $e(p) \overset{H}{\Vdash} \varphi[a_1 \ldots a_n]$.

Le cas des modèles booléo-valués de ZF fournit donc une situation adéquatement décrite par une sémantique de Kripke-Joyal associée à une topologie non triviale sur l'algèbre de Boole B choisie, à savoir la topologie des recouvrements par union quelconque.

Bibliographie.

[1] Boileau A., Les multiples splendeurs du forcing (mémoire, Université de Montréal) 1973.

[2] Fourman M.P. et Scott D.S., Sheaves and logic, Lectures Notes in Mathematics 753, Springer-Verlag 1977.

[3] Godement R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Scientifiques et Industrielles 1252, Hermann 1973.

[4] Grothendieck A. et Verdier J.L., Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Mathematics 269, Springer-Verlag 1972.

[5] Jech T., Set theory, Academic Press 1978.

[6] Johnstone P.T., Topos theory, Academic Press 1977.

[7] Keisler H.J., Forcing and omitting types theorem dans MAA studies in Mathematics, vol. 8, M.D. Morley Editor, The Math. Ass. of America, 1973, pp. 96-133.

[8] Kripke S.A., Semantical analysis of intuitionistic logic I, dans Proc. of the eight logic Coll., Oxford 1963, North Holland.

[9] Lucas Th. et Lavendhomme R., Analyse du forcing ensembliste, Rapport 99 - mars 1980, séminaire de mathématique pure (Louvain).

[10] Moreau M., Modèles de Kripke, dans Intuitionnisme et théorie de la démonstration, Cahiers du Centre de logique 1, Cabay 1980.

[11] Moreau M., Van den Bossche G., Moens J.L., Le théorème de Higgs, Log. Note 9, non publié, 1978.

[12] Reyes G.E., Théorie des modèles et faisceaux, Rapport 63, séminaire de mathématique pure (Louvain).

[13] Robinson A., Forcing in Model Theory, Actes du Congrès International Math. 1970, tome I.