CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

3

J.L. MOENS

FORCING et SÉMANTIQUE de KRIPKE-JOYAL

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
INSTITUT SUPÉRIEUR DE PHILOSOPHIE

CABAY - LOUVAIN-LA-NEUVE - 1982

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

Edités par Th. LUCAS
M. CRABBÉ
P. MARCHAL
Institut Supérieur de philosophie
Unité de Logique
1, chemin d'Aristote
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE N° 3
Moens, Forcing et Sémantique de Kripke-Joyal, 30 pp., 14,5 x 22

D / 1982 / 2457/28 ISBN 2-87077-098-7

Printed in Belgium

Distribué par : CABAY
Agora 11,
1348 LOUVAIN-LA-NEUVE

INTRODUCTION

par

Th. LUCAS

Dans leur introduction à "La logique des topos" (Journal of Symbolic Logic, 46, 1981, p. 6), Boileau et Joyal sont d'avis que "toute une série de recherches visent à rapprocher les méthodes suivantes :

(1) Mathématique intuitionniste.

(2) Forcing de Cohen et Robinson.

(3) Logique algébrique.

(4) Géométrie algébrique.

(5) Géométrie différentielle et analytique.

(6) Topologie algébrique : cohomologie, homotopie.

(7) Théorie de Galois.

(...) La structure centrale qui joue le rôle d'élément provocateur et unificateur est celle de topos".

On peut dire aussi plus naïvement que ce qui permet de rapprocher ces diverses méthodes est la prise de conscience de la notion d'ensemble variable. Ainsi, au modèle statique de la logique classique constitué par un ensemble et l'interprétation des symboles d'opération et de relation, s'oppose le modèle de la logique intuitionniste, constitué par une famille de structures classiques, famille indicée par un ensemble pré-ordonné; l'ensemble pré-ordonné est le domaine de variation; la famille de structures est la "structure variable". Dans la théorie des ensembles et dans la théorie des modèles, on décrit la construction de forcing : partant d'une structure classique et d'un ensemble pré-ordonné de "conditions", on conçoit ces conditions comme des contraintes auxquelles le modèle que l'on veut obtenir devra obéir; ici encore, les conditions donnent le domaine de variation et le modèle désiré s'obtient, peut-on dire, par modifications successives du modèle de départ. En algèbre et en géométrie, les théorèmes de représentation sont fondamentaux; ici, c'est le modèle final qui est donné mais sa structure (au sens naïf) est clarifiée par le fait qu'il est représenté comme produit direct ou sous-produit direct de structures plus simples ou, plus généralement, comme sections globales d'un faisceau de structures "simples" sur un espace topologique; les ouverts de l'espace topologique constituent les moments de la décomposition, c'est le domaine de variation; des structures simples à la structure à décomposer, il y a toute une série de structures intermédiaires qui sont autant d'états successifs de structures qui convergent vers la structure finale.

Le travail que J.L. Moens présente ici et qui a fait l'objet d'exposés au "Séminaire de logique formalisée" de l'Institut Supérieur de Philosophie de l'UCL pendant l'année académique 1980-1981 clarifie quelques-uns des liens entre ces diverses notions.

Le domaine de variation est ici donné de façon très générale par un site de Grothendieck et les faisceaux sur ce site sont les ensembles variables. Sur un site donné, les faisceaux constituent un topos de Grothendieck, cas particulièrement fondamental des topos élémentaires de Lawvere.

Le lecteur peu au courant de la théorie des catégories pourra s'y initier en consultant par exemple MAC LANE S., "Categories for the working mathematician", Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971 ou SCHUBERT H., "Kategorien I" et "Kategorien II", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

TABLE DES MATIERES