

LE PROJET DES GRUNDLAGEN

Les Grundlagen der Arithmetik, publiés en 1884, font partie du programme logistique de Frege, programme qui vise, pour l'essentiel, à montrer que l'arithmétique est une branche de la logique.

Il semble que ce soit dès la première année de son enseignement comme Privatdozent à Iéna, que Frege conçut l'idée de ce programme, ainsi qu'en témoigne le compte rendu qu'il publia vers cette époque du livre de H. Seeger, Die Elemente der Arithmetik, für den Schulunterricht bearbeitet. (Ce compte rendu est aujourd'hui accessible dans les Kleine Schriften).

Quatre ans plus tard, dans la Begriffsschrift (1879), Frege annonce les différentes étapes de son programme. Pour l'essentiel, il s'agit de prouver les lois fondamentales de l'arithmétique. Mais qu'est-ce qu'une preuve ? Frege distingue entre preuves purement logiques et preuves appuyées sur des faits empiriques. En arithmétique, dit-il, les preuves se doivent d'être purement logiques. Or, pour qu'il soit possible d'élaborer des preuves purement logiques pour toutes les lois de l'arithmétique, il est clair qu'il faut avoir préalablement défini les concepts de base de l'arithmétique en termes exclusivement de notions logiques. Et Frege ne pense pas ici seulement au concept de nombre. Il pense encore, principalement, aux concepts qui impliquent une idée d'ordre, telle la notion d'induction mathématique, telles encore les notions de relation comme "plus grand que", "égal à", "plus petit que", concepts que Frege définira en termes du concept général d'"ordre dans une suite". Ces considérations ont amené Frege à subdiviser son programme en les étapes successives suivantes :

(1) définir le concept d'"ordre dans une suite" d'une manière purement logique,

(2) à l'aide du concept d'"ordre dans une suite" et de notions purement logiques, définir les concepts de base de l'arithmétique,

(3) démontrer les lois fondamentales de l'arithmétique, en s'aidant uniquement des concepts de base de l'arithmétique, et de la logique.

La première étape est réalisée dans la Begriffsschrift elle-même, plus particulièrement dans la troisième partie de cet ouvrage. La seconde étape, consacrée donc à la définition des concepts de base de l'arithmétique, fait l'objet des Grundlagen. Enfin, la dernière étape, qui constitue en quelque sorte une

démonstration par les faits du programme logistique, est développée tout au long des deux tomes des Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1903).

Le projet des Grundlagen est donc de définir les concepts de base de l'arithmétique d'une manière purement logique. Dans l'espèce, le concept de nombre. D'une manière générale, définir ce qu'est le nombre cardinal ; en particulier, montrer comment on peut définir chacun des nombres de la suite des nombres naturels.

C'est en cherchant à déduire certaines propriétés de la suite des nombres naturels, que Frege en vint à évoquer la possibilité de fonder logiquement l'induction mathématique.

Nous aborderons d'abord le problème de l'induction mathématique. Ensuite, nous analyserons la manière dont Frege définit le nombre cardinal. Enfin, nous examinerons la procédure qu'adopte Frege pour définir les nombres particuliers.

I. Le problème de l'induction mathématique.

Frege a donc évoqué dans les Grundlagen la possibilité de fonder logiquement l'induction mathématique. Il est possible, en effet, en partant des indications fournies par Frege, de présenter l'induction mathématique sous la forme d'un raisonnement dont la validité est une conséquence directe de la définition, donnée dans la Begriffsschrift, du concept d'"ordre dans une suite".

A. La définition logique du concept d'"ordre dans une suite".

Pour Frege, une suite est un certain nombre d'objets reliés entre eux par une relation binaire.

Frege indique, pour commencer, la signification qu'il faudra accorder à une expression telle que ' $f(x,y)$ ' :

Affirmer que $f(x,y)$, c'est dire que quel que soit x et quel que soit y , et quelle que soit la procédure f , y est le résultat de l'application de f à x .

Selon Frege, la signification qu'on doit accorder à une expression telle que ' $f(x,y)$ ' peut encore être traduite, de manière équivalente, comme suit :

Affirmer que $f(x,y)$, c'est dire que quel que soit x et quel que soit y , et quelle que soit la relation f , y est dans la relation f à x .

Frege définit ensuite quand une propriété est héréditaire dans une suite. Une propriété F est héréditaire dans une suite f, si la condition suivante est satisfaite :

Si x a la propriété F, alors tout objet qui est le résultat de l'application de f à x a la propriété F.

A partir de là Frege entreprend de définir le concept d'"ordre dans une suite". Ce qu'il va définir, c'est quand dans une suite f un élément y suit un élément x. L'idée est que dans une suite f un élément y suit un élément x lorsque

y est le résultat de l'application de f à x, ou y est le résultat de l'application de f à z qui est le résultat de l'application de f à x, ou y est le résultat de l'application de f à w qui est le résultat de l'application de f à z qui est le résultat de l'application de f à x, ou ... et ainsi de suite.

Seulement, une énumération, lorsqu'elle doit en principe se poursuivre à l'infini, ne peut donner une définition complète. A cela s'ajoute, dans le cas présent, qu'une expression telle que "et ainsi de suite" implique elle-même l'idée d'ordre dans une suite. C'est précisément la notion de propriété héréditaire qui va permettre à Frege de surmonter ces difficultés en subsumant l'ensemble des applications possibles de f sous une loi unique.

Frege formule sa définition en ces termes :

y suit x dans la suite f si et seulement si pour n'importe quelle propriété F, le fait que y a la propriété F peut être établi à partir des deux seules conditions suivantes :

- (1) si $f(x, z)$, alors $F(z)$,
- (2) F est héréditaire, c'est-à-dire que si $F(x)$, alors si $f(x, z)$, $F(z)$.

Frege définira encore quand y appartient à la suite f commençant avec x :

y appartient à la suite f commençant avec x lorsque y suit x ou que y est identique à x.

Cette deuxième définition a pour objet de définir l'ordre dans une suite qui n'est pas limitée aux successeurs de x, mais qui au contraire, contiendrait x lui-même.

"y suit x" se traduirait aujourd'hui par "x est un ancêtre propre de y". Soit $R(=f)$ une relation. $*R$ ou l'ancestrale propre de R est la relation suivante :

$$*Rxy \equiv (Rxy) \cup (\exists z) (Rxz \cap Rzy) \cup (\exists z) (\exists w) (Rxz \cap Rzw \cap Rwy) \cup \dots$$

"y appartient à la suite commençant par x" se traduirait aujourd'hui par "x est un ancêtre de y". Soit $R(=f)$ une relation.

⊗ R ou l'ancestrale de R est la relation suivante :

⊗ $Rxy = (x = y) \cup \ast Rxy$.

B. Le fondement logique de l'induction mathématique.

Considérons l'induction mathématique sous la forme du raisonnement suivant :

o a la propriété F

si un nombre naturel n a la propriété F, alors m, le successeur immédiat de n dans la suite des nombres naturels, a la propriété F

tout nombre naturel n a la propriété F.

Si on veut fonder logiquement l'induction mathématique, il faut, dit Frege, considérer la suite des nombres naturels comme un cas particulier d'une suite en général. Interprétons $f(n,m)$ comme la relation "m succède immédiatement à n dans la suite des nombres naturels" (Grundlagen, § 81) ; f est donc alors une relation qui relie, deux à deux, les termes de la suite des nombres naturels, de sorte que la suite des nombres naturels peut elle-même être considérée comme une suite f.

Partant des indications de Frege, et utilisant la notation qui lui est propre, nous pouvons reformuler l'induction mathématique comme suit :

F(o)

si F(n) et $f(n,m)$, alors F(m)

tout nombre naturel n a la propriété F.

Pour montrer que l'induction mathématique, ainsi reformulée, est un raisonnement valide, il nous suffira, comme le suggèrent W. et M. Kneale dans leur Development of logic (p. 469), de définir le nombre naturel par la place qu'il occupe dans la suite des nombres naturels, de telle manière que

"n est un nombre naturel" signifie la même chose que

"n est identique à o ou suit o dans la suite des nombres naturels".

A partir de là, et compte tenu du fait que la suite des nombres naturels est une suite f, nous pouvons maintenant formuler l'induction mathématique comme suit :

(1) F(o)

(2) si F(n) et $f(n,m)$, alors F(m)

si $n = o$ ou si n suit o dans la suite f, alors F(n).

Montrons que l'induction mathématique, ainsi nouvellement reformulée, est un raisonnement valide.

Les prémisses (1) et (2) autorisent conjointement, à titre de conclusion, la prémisse additionnelle "si $f(o,n)$, alors $F(n)$ ". D'autre part, du fait que $F(o)$, il suit que si $n = o$, alors $F(n)$; on peut donc remplacer la conclusion, du raisonnement par la proposition plus simple "si n suit o dans la suite f , alors $F(n)$ ". En déplaçant l'antécédent de la nouvelle conclusion vers les prémisses, on obtient ainsi le raisonnement suivant :

- (1) $F(o)$
- (2) si $F(n)$ et $f(n,m)$, alors $F(m)$
- (3) si $f(o,n)$, alors $F(n)$
- (4) n suit o dans la suite f

$F(n)$.

Or, la validité de ce raisonnement suit immédiatement de la définition, donnée dans la Begriffsschrift (§ 26), de l'ordre dans une suite f . En vertu de cette définition, en effet, si y suit x dans la suite f , on peut, quelle que soit la propriété F , établir la conclusion "y a la propriété F " à partir des deux seules conditions " F est héréditaire dans la suite f " et "l'objet qui est le résultat de l'application de f à x a la propriété F ". Cela vaut donc en particulier dans le cas de notre raisonnement, où o prend la place de x , et n prend la place de y , et où les prémisses (2) et (3) expriment respectivement que " F est héréditaire dans la suite f " et que "l'objet qui est le résultat de l'application de f à o a la propriété F ".

II. La définition du nombre cardinal.

Frege a lu l'ouvrage de Cantor, Grundlagen einer allgemeine Mannichfaltigkeitslehre (1883), ouvrage que Frege discute dans ses Grundlagen.

Examinons la définition que donne Cantor du nombre cardinal.

Pour Cantor, un nombre cardinal est le nombre cardinal d'un ensemble, c'est-à-dire ce qu'il y a de commun entre cet ensemble et les ensembles qui lui sont équivalents. Selon Cantor, le nombre cardinal d'un ensemble est le concept général qui résulte d'un ensemble lorsqu'on fait abstraction de l'ordre des éléments de l'ensemble ainsi que de la qualité propre de ces éléments. (Pour rappeler cette double abstraction lors de la désignation d'un

nombre cardinal, Cantor introduit deux barres horizontales qu'il place au-dessus de la lettre qui désigne l'ensemble ; par exemple, le nombre cardinal de l'ensemble N sera désigné par le signe : $\overline{\overline{N}}$.

Pour définir le nombre cardinal, Cantor a donc utilisé la notion de l'équivalence entre deux ensembles :

Deux ensembles A et B sont équivalents s'il existe une correspondance biunivoque entre eux, c'est-à-dire s'il existe une relation telle que

tout élément de A est dans cette relation avec un et un seul élément de B, et que

pour tout élément de B, il existe un et un seul élément de A qui est dans cette relation avec lui.

La notion cantorienne de nombre cardinal fait ainsi intervenir les notions suivantes :

ensemble,
élément d'un ensemble,
correspondance biunivoque.

Frege approuve la définition cantorienne du nombre cardinal, mais il lui reproche cependant d'utiliser des notions qui n'ont pas été définies logiquement. Ce sont ces définitions que Frege va chercher à élaborer.

Au lieu de la notion d'"élément d'un ensemble", Frege utilisera la notion d'"objet tombant sous un concept".

Au lieu de la notion d'"ensemble", Frege utilisera la notion de l'"extension d'un concept", cette dernière expression pouvant être définie comme signifiant "ce qui est formé de tous les objets qui tombent sous ce concept, et de ces objets seulement".

Les notions de base dont part Frege sont donc les notions logiques de "concept" et de "tomber sous un concept".

Frege doit encore définir la notion de "correspondance biunivoque". La correspondance biunivoque (beiderseits eindeutig Zuordnung) sera définie comme correspondance biunivoque entre les objets tombant sous un concept A et les objets tombant sous un concept B :

Les objets tombant sous un concept A sont en correspondance biunivoque avec les objets tombant sous un concept B, s'il existe une relation R telle que

1) tout objet tombant sous le concept A est dans la relation R avec un objet tombant sous le concept B,

2) pour tout objet tombant sous le concept B, il y a un objet tombant sous le concept A qui est dans la relation R avec lui,

3) si x est dans la relation R avec un objet y et un objet z, alors y est identique à z,

4) si un objet x et un objet y sont chacun dans la relation R avec un objet z, alors x et y sont identiques.

Frege doit maintenant montrer comment il faut articuler l'ensemble de ces notions logiques pour définir ce que Cantor appelait "l'équivalence de deux ensembles" et pour, à partir de là, définir ce que Cantor appelait "le nombre cardinal d'un ensemble".

Au lieu de parler de "l'équivalence d'un ensemble A et d'un ensemble B", Frege parlera de "l'équinuméricité (Gleichzaligkeit) d'un concept A et d'un concept B" :

Deux concepts A et B sont équinumériques s'il existe une correspondance biunivoque entre les objets tombant sous le concept A et les objets tombant sous le concept B.

D'autre part, au lieu de parler du nombre cardinal d'un ensemble, Frege parlera du nombre cardinal qui appartient à un concept.

La définition que propose Frege du nombre cardinal est alors la suivante :

Le nombre cardinal qui appartient au concept A est l'extension du concept "équinumérique au concept A".

Ainsi, alors que Cantor concevait le nombre cardinal comme quelque chose qu'il faut prédiquer d'un ensemble, Frege conçoit le nombre cardinal comme quelque chose qui appartient à un concept. Pour Cantor, "n est un nombre cardinal" signifiait "il existe un ensemble tel que n est le nombre cardinal de cet ensemble" ; pour Frege, "n est un nombre cardinal" signifie "il existe un concept tel que n appartient à ce concept". D'autre part, là où Cantor définissait le nombre cardinal d'un ensemble A comme ce qu'il y a de commun entre l'ensemble A et les ensembles qui lui sont équivalents, Frege définit le nombre cardinal qui appartient à un concept A comme l'extension du concept "équinumérique au concept A".

On voit donc que la définition du nombre cardinal proposée par Frege n'est pas fondamentalement distincte de celle qu'avait introduite Cantor. Au contraire, il apparaît, à partir de ce qui précède, que la définition élaborée par Frege résulte pour l'essentiel d'une transposition logique de la définition cantorienne.

III. La définition des nombres naturels.

Pour définir les nombres naturels, on partira de la condition générale sous laquelle un objet est un nombre cardinal, à savoir donc que

n est un nombre cardinal s'il existe un concept tel que n appartient à ce concept.

Ainsi, pour définir le nombre 12, par exemple, on examinera à quel concept le nombre 12 appartient.

Le problème est cependant qu'il faut chercher à définir les nombres naturels d'une manière purement logique. De ce point de vue, il ne servirait à rien de vouloir définir le nombre 12 en partant du fait, par exemple, que 12 appartient au concept "apôtre" : une définition purement logique, en effet, ne peut pas faire intervenir de concepts empiriques.

Afin de définir les nombres naturels d'une manière purement logique, Frege va reprendre une idée ancienne (avancée déjà par Leibniz), à savoir qu'il faut chercher à définir les nombres naturels les uns en fonction des autres, selon la place qu'ils occupent dans la suite des nombres naturels. Ainsi, il faudra définir 2 à partir de 1 ; 3 à partir de 2 et de 1 ; etc. Frege reproche cependant à cette manière habituelle de procéder que le nombre 1 n'y a pas été défini, et que la définition par exemple de "3" comme " $2 + 1$ " présuppose elle-même les lois de l'arithmétique. Frege partira, lui, du nombre 0, pour lequel il formulera une définition purement logique (entendez : une définition en termes de notions purement logiques), et il définira ensuite, d'une manière purement logique, chaque nombre en termes des nombres qui le précèdent dans la suite. Frege obtient ainsi la série suivante de définitions :

- 0 est le nombre qui appartient au concept "non identique à soi-même",
- 1 est le nombre qui appartient au concept "identique à 0",
- 2 est le nombre qui appartient au concept "identique à 0 ou à 1",
-

Ces définitions des nombres naturels, bien qu'elles s'inspirent de l'ordre donné dans la suite des nombres naturels, ne font pas elles-mêmes intervenir cet ordre explicitement. Elles ne font donc pas état de cet ordre. En ce sens, la définition que donne Frege du nombre 1, par exemple, diffère diamétralement de celle qu'on a l'habitude d'adjoindre à l'axiomatique de Peano, à savoir que 1 est le successeur de 0 (voir P. Suppes, *Axiomatic Set Theory*, pp. 136-137). Chez Frege, c'est en quelque sorte le mouvement inverse qui a lieu : à partir de la définition des nombres naturels, on déduira la place qu'occupent les nombres dans la suite des nombres naturels. Regardons cela de plus près.

Déduire la place qu'occupent les nombres dans la suite des nombres naturels, c'est établir, d'une manière purement logique, pour deux nombres m et n choisis adéquatement, que n suit immédiatement m dans la suite des nombres naturels.

La définition que propose Frege de la relation " n suit immédiatement m dans la suite des nombres naturels" est intimement liée $\rightarrow$ on le comprendra mieux plus loin par les exemples $\rightarrow$ non seulement à la définition du nombre cardinal comme tel, mais encore à la forme générale de la définition des nombres naturels particuliers :

n suit immédiatement m dans la suite des nombres naturels, s'il existe un concept F et un objet x qui tombe sous ce concept de telle manière que le nombre cardinal qui appartient au concept " x tombe sous F mais n'est pas identique à x " est m .

En plus de la définition des nombres naturels et de la définition de la relation " n suit immédiatement m dans la suite des nombres naturels", les déductions feront appel à un principe important, principe que Frege démontre dans le paragraphe 73 des Grundlagen, et que nous appellerons ici, simplement, "Loi de Frege" :

Si un concept A est équinumérique à un concept B , alors l'extension du concept "équinumérique au concept A " est identique à l'extension du concept "équinumérique au concept B ". En d'autres termes, si un concept A est équinumérique à un concept B , alors le nombre cardinal qui appartient au concept A est identique au nombre cardinal qui appartient au concept B .

Considérons maintenant quelques exemples.

D'une manière générale, pour montrer qu'un nombre n suit immédiatement un nombre m dans la suite des nombres naturels, on choisira comme concept F le concept auquel n appartient par définition, et comme objet x le nombre m lui-même.

Soit à établir que 1 suit immédiatement 0 dans la suite des nombres naturels.

On choisit comme concept F le concept auquel le nombre 1 appartient par définition, c'est-à-dire le concept "identique à 0".

On choisit, d'autre part, comme objet x le nombre 0.

Il faut alors établir successivement que

(1) 0 tombe sous le concept "identique à 0", que

- (2) le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0" est 1, et, enfin, que
- (3) 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept "qui tombe sous le concept 'identique à 0' mais n'est pas identique à 0".

Le point (1) est évident par lui-même.

Le point (2) résulte de la définition même du nombre 1.

Quant au point (3), pour l'établir, on raisonne comme suit.

Ce qui tombe sous le concept "identique à 0" est identique à 0. Ainsi, pour établir le point (3), il suffira de montrer que 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0 mais non identique à 0". Mais 0 est par définition le nombre cardinal qui appartient au concept "non identique à soi-même". Or, le concept "non identique à soi-même" est équinumérique au concept "identique à 0 mais non identique à 0". D'où il suit, en vertu de la loi de Frege, que 0 est également le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0 mais non identique à 0".

Soit à établir que 2 suit immédiatement 1 dans la suite des nombres naturels.

On choisit comme concept F le concept auquel le nombre 2 appartient par définition, c'est-à-dire le concept "identique à 0 ou 1".

On choisit, d'autre part, comme objet x le nombre 1.

Il faut alors établir successivement que

- (1) 1 tombe sous le concept 'identique à 0 ou à 1', que
- (2) le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0 ou à 1" est 2, et, enfin, que
- (3) 1 est le nombre cardinal qui appartient au concept "qui tombe sous le concept 'identique à 0 ou à 1' mais n'est pas identique à 1".

Le point (1) est évident par lui-même.

Le point (2) résulte de la définition même du nombre 2.

Quant au point (3), on l'établit comme suit. Ce qui tombe sous le concept "identique à 0 ou à 1" est identique à 0 ou à 1. Ainsi, pour établir le point (3), il suffira de montrer que 1 est le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0 ou à 1 mais non identique à 1". Mais 1 est par définition le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0". Or, le concept "identique à 0" est équinumérique au concept "identique à 0 ou à 1 mais non identique à 1". D'où il suit, en vertu de la loi de Frege, que 1 est également le nombre cardinal qui appartient au concept "identique à 0 ou à 1 mais non identique à 1".

=====