

ORIGINES DE LA DÉCOUVERTE PAR LEIBNIZ DU CALCUL INFINITÉSIMAL

Ce sont des recherches en géométrie qui ont mené Leibniz à la découverte du calcul infinitésimal.

La découverte du calcul différentiel est liée à l'étude de la détermination de la tangente à une courbe, le problème dit "des tangentes" ; la découverte du calcul intégral est liée à l'étude du calcul de l'aire comprise sous une courbe, le problème dit "des quadratures" ; enfin, la découverte de l'existence d'un calcul englobant dans une unité le calcul différentiel et le calcul intégral, la découverte donc du calcul infinitésimal proprement dit, trouve son origine dans la reconnaissance d'un rapport existant entre les deux problèmes, le problème des tangentes et celui des quadratures.

PLAN

Section I. La dérivée définie comme la pente d'une courbe à un point variable P.

L'objet de cette section est de rappeler comment on aborde aujourd'hui le problème des tangentes à l'aide de la notion de limite introduite par Cauchy. En même temps, on rappelle comment on peut donner, dans le cadre du problème des tangentes, une interprétation géométrique de la dérivée.

Section II. L'intégrale définie comme l'expression de l'aire comprise sous une courbe.

L'objet de cette section est de rappeler comment on aborde aujourd'hui le problème des quadratures à l'aide de la notion de limite, et comment on peut donner, dans le cadre du problème des quadratures, une interprétation géométrique de l'intégrale.

Section III. Le problème des tangentes avant Leibniz.

Cette section se compose de deux parties :

- A. Archimède et la tangente à la spirale,
- B. La méthode d'Isaac Barrow.

Section IV. Le problème des quadratures avant Leibniz.

Cette section se compose de trois parties :

- A. Archimède et la quadrature de la parabole,
- B. Pascal et le Traité des sinus du quart de cercle,
- C. La méthode d'Isaac Barrow.

Section V. La découverte par Barrow du "théorème fondamental".

Cette section se compose de deux parties :

- A. Le "théorème fondamental" du calcul infinitésimal,
- B. Interprétation par Struik d'un texte de Barrow.

Section VI. La découverte par Leibniz du calcul infinitésimal.

SOURCES

The origins of the infinitesimal calculus, by Margaret E. Baron, Pergamon Press, 1969.

The history of the calculus and its development, by Carl B. Boyer, Dover Publications, 1959.

A source book in mathematics, 1200-1800, edited by D.J. Struik, Harvard University Press, 1969.

The treasury of mathematics, 2 volumes, by Henrietta Midonick, Penguin Books, 1968.

»

»

»

SECTION I. LA DERIVEE DEFINIE COMME LA PENTE D'UNE COURBE
----- A UN POINT VARIABLE P.

La pente d'une courbe $y = f(x)$ au point P est déterminée par la pente de la tangente à cette courbe au point P, la tangente t (voir Fig. 1).

Pour pouvoir déterminer la pente de la tangente au point P, il nous faut considérer un point de la courbe voisin de P, un point P'.

A travers les points P et P', nous traçons une ligne droite qui rencontre l'axe des x et forme avec celui-ci un angle

a'. Nous appelons la ligne droite qui traverse les points P et P', une sécante de la courbe, la sécante t'.

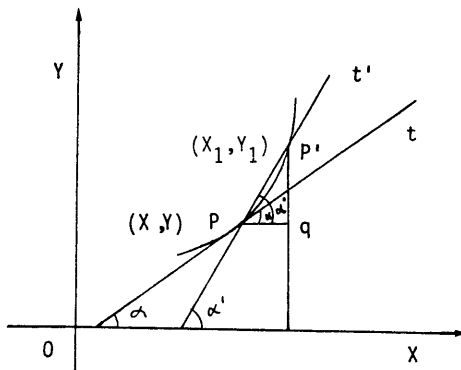
Pour déterminer la pente de la tangente t, nous allons d'abord déterminer la pente de la sécante t'. Ce dernier problème se ramène à celui de déterminer la pente d'une ligne droite dans un plan cartésien. A travers le point P, nous traçons une parallèle à l'axe des x, et à partir du point P', nous traçons une perpendiculaire à l'axe des x. Ces deux droites se rencontrent au point Q. La pente de la sécante t' est donnée par la tangente trigonométrique de l'angle a', c'est-à-dire par le rapport des droites P'Q et PQ :

$$\text{pente de } t' = \tan a' = \frac{P'Q}{PQ} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Si nous représentons l'opération de faire une différence par Δx , nous avons :

$$\text{pente de } t' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

(FIG. 1)



L'idée est alors la suivante. Si x_1 tend vers x , alors y_1 tend vers y , de sorte que le point P' descend le long de la courbe vers le point P, ce qui entraîne que la position de la sécante se rapproche de la position de la tangente. La tangente est ainsi le limite de la sécante, et la pente de la tangente est la limite de la pente de la sécante :

$$\text{pente de } t = \limite \text{ pente de } t' = \limite \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} =$$

$$\limite \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \limite \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}, \text{ lorsque } \Delta x \text{ tend vers zéro.}$$

Définition de la dérivée. La fonction $y = f(x)$ donne la hauteur de la courbe $y = f(x)$ pour la valeur x . Nous pouvons maintenant considérer une nouvelle fonction de x , la fonction $f'(x)$, qui donne la pente de la tangente à la courbe pour un point variable P . On appelle cette fonction de x , la dérivée de la fonction $f(x)$.

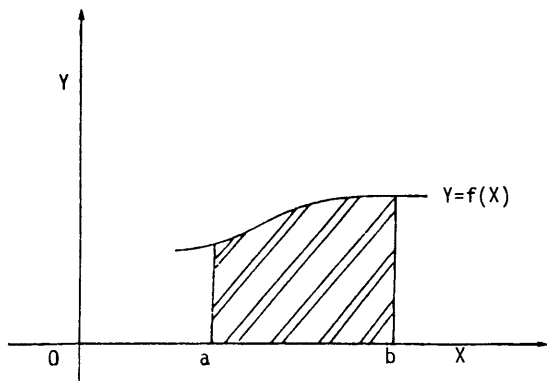
*
* *

SECTION II. L'INTEGRALE DEFINIE COMME L'EXPRESSION DE L'AIRE COMPRISE SOUS UNE COURBE.

Soit une courbe $y = f(x)$. Considérons alors l'aire délimitée au-dessus par la courbe (voir Fig. 2), en-dessous par l'axe des x , et à gauche et à droite par les perpendiculaires tracées depuis la courbe vers l'axe des x aux points a et b .

Le problème est de calculer l'aire comprise sous la courbe.

(FIG. 2)



Pour résoudre ce problème, on subdivise l'intervalle de $x = a$ à $x = b$ en un nombre de petits sous-intervalles. On trace alors des perpendiculaires depuis la courbe vers l'axe des x aux points de division. Le domaine est ainsi subdivisé en un nombre de petites portions. On remplace ensuite chaque petite portion par un rectangle dont la hauteur est choisie comme étant la moyenne entre la plus grande et la plus petite hauteur de la courbe dans la portion considérée.

L'aire comprise sous la courbe se présente alors sous la forme d'une somme de petits rectangles. Mais l'aire n'est évidemment pas égale à cette somme. Cette somme ne fait qu'approcher l'aire totale. Mais, d'autre part, il est clair que plus grand est le nombre des rectangles, et corrélativement plus petit chaque rectangle en particulier, meilleure sera l'approximation de l'aire par la somme. D'où l'idée que l'aire n'est autre que la limite de cette somme, lorsque le nombre des termes croît indéfiniment, ou lorsque, corrélativement, la largeur de chaque rectangle décroît de manière à tendre vers zéro.

Par définition, l'aire comprise sous la courbe $y = f(x)$ et exprimée par la limite de cette somme, est l'intégrale de la fonction $y = f(x)$ de a à b .

»

» »

SECTION III. LE PROBLEME DES TANGENTES AVANT LEIBNIZ.

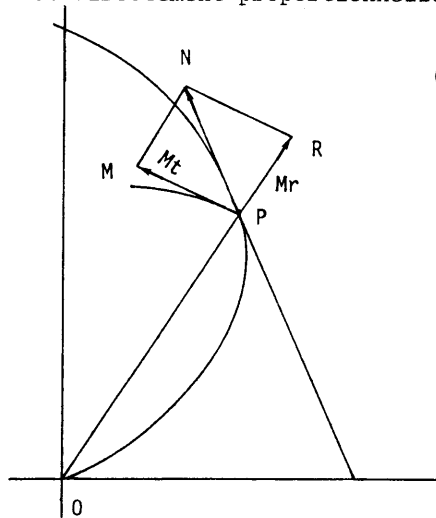
A. ARCHIMEDE ET LA TANGENTE A LA SPIRALE.

Archimède a donné une méthode pour déterminer la tangente à une spirale.

Définition de la spirale. Considérons une ligne droite, dont une des extrémités est fixe. Supposons que cette droite effectue, à une vitesse uniforme, un mouvement de rotation autour de son extrémité fixe dans un plan. Admettons que, en même temps, un point se meut le long de la droite, selon un mouvement uniforme, en partance de l'extrémité fixe. Nous dirons que ce point décrit une spirale dans le plan. (Pour Archimède, la spirale est la figure décrite par le point pendant que la droite effectue un tour complet de son point de départ à son point d'arrivée).

Archimède détermine la tangente à une spirale au point P , en cherchant à déterminer la direction du mouvement instantané du point P , c'est-à-dire la direction d'une quantité infinitésimale de mouvement du point P .

Archimède analyse le mouvement instantané du point P en deux mouvements partiels, un mouvement M_r (voir Fig. 3) dans le prolongement de la droite OP selon une vitesse uniforme V_r , et un mouvement M_t perpendiculaire au mouvement M_r avec une vitesse variable V_t , vitesse directement proportionnelle à la vitesse uniforme de la droite OP et directement proportionnelle à la longueur du segment OP.



(FIG. 3)

Si on connaît les vitesses V_r et V_t , ainsi que la longueur du segment OP, on pourra déterminer le rapport entre le mouvement M_r et le mouvement M_t (qui sont des quantités infinitésimales de mouvement), et à partir de là construire ce que les péripatéticiens ont appelé le parallélogramme des mouvements.

La direction du mouvement instantané du point P, et par là la tangente à la spirale au point P, est alors déterminée comme étant la diagonale de ce parallélogramme.

Remarquons que le mouvement du point P, en réalité, ne se fait pas dans la direction de PN, mais dans la direction de la spirale elle-même. Cependant, parce qu'il s'agit ici de quantités infinitésimales de mouvement, on considère que la tangente à la spirale peut être identifiée avec l'arc de spirale lui-même. D'ailleurs, si on obtient que le mouvement du point P se fait dans la direction PN, c'est parce que le mouvement partiel du point P, le mouvement M_t , a été analysé comme perpendiculaire au mouvement partiel M_r , alors que le mouvement M_t s'effectue en réalité dans la direction de l'arc de cercle de rayon OP (mais ici, de même que tout-à-l'heure, parce qu'il s'agit de quantités infinitésimales de mouvement, on considère que, puisque les côtés MN et PR du parallélogramme sont infiniment proches, la perpendiculaire peut être identifiée à l'arc de cercle).

La méthode d'Archimède annonce la méthode qu'utilisera Barrow pour déterminer la tangente à une courbe (bien que chez Barrow la

méthode réussira finalement à s'affranchir d'un recours à des notions empruntées à la cinématique) : au lieu de passer par le détour d'une sécante, et de concevoir la tangente comme la limite de cette sécante, on procèdera directement, comme chez Archimède, à l'identification d'une portion infinitésimale de la tangente et d'une portion infinitésimale de la courbe.

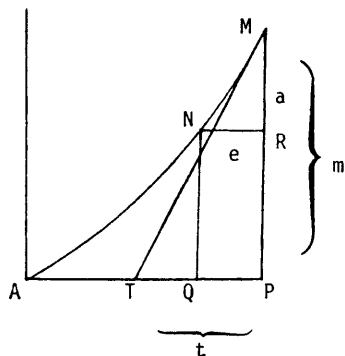
B. LA METHODE D'ISAAC BARROW.

Voici comment Barrow procède pour déterminer la tangente à une courbe.

Soit AP et PM (voir Fig. 4) deux lignes droites telles que PM sectionne une courbe donnée au point M. Soit alors MT la tangente à la courbe au point M, tangente qui rencontre la ligne droite AP au point T.

Le problème est alors de déterminer la direction de la tangente MT. Comme la longueur de la droite PM est connue, ce problème se ramène à celui de calculer la longueur de la droite PT.

(FIG. 4)



On considère un arc infiniment petit MN de la courbe. A travers N on trace NR parallèle à AP, et NQ parallèle à PM. L'idée est alors de comparer PM et PT en comparant MR et NR. (En effet, comme l'arc MN est infiniment petit, Barrow considère que cet arc peut être identifié à une portion de la tangente, de sorte que la figure MNR peut être assimilée à un triangle, triangle qui est semblable au triangle MTP).

On pose $PM = m$, $PT = t$, $MR = a$ et $NR = e$. On cherche alors une équation qui exprime le rapport entre les coordonnées de M et de N, compte tenu du fait que les points M et N sont infiniment

proches. En d'autres termes, on cherche une équation qui exprime les coordonnées des points M et N en termes de a et de e. Le calcul de cette équation permettra de découvrir le rapport entre a et e. La solution du problème consistera alors tout simplement à remplacer dans ce rapport a par m, et e par t.

Barrow donne les règles qui doivent être observées lors du calcul de l'équation :

1) Supprimer tout terme contenant un produit de a et de e, ainsi que tout terme contenant une puissance de a ou de e, "étant donné que ces termes n'ont pas de valeur" (Barrow ne justifie pas ce point);

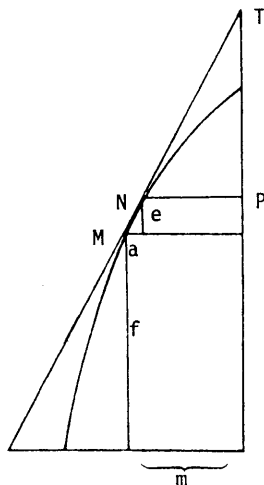
2) Eliminer de l'équation tout terme ayant une valeur déterminée (Leibniz dira "valeur assignable"). La raison en est la suivante. La différence entre les coordonnées des points M et N est infinitésimale ; c'est pourquoi les coordonnées des points M et N ont les mêmes valeurs assignables ; on trouvera donc de part et d'autre de l'égalité les mêmes valeurs assignables, et c'est pourquoi on peut éliminer celles-ci.

Exemple de calcul d'une équation.

Supposons que les coordonnées de deux points M (f,m) et N (f + e, m - a) d'une courbe MN (voir Fig. 5) soient reliées par la relation suivante

$$f^3 + m^3 = (f + e)^3 + (m - a)^3.$$

(FIG. 5)



En vertu des produits remarquables, nous avons :

$$f^3 + m^3 = f^3 + 3f^2e + 3fe^2 + e^3 + m^3 - 3m^2a + 3ma^2 - a^3.$$

Nous éliminons les termes contenant des puissances de a ou e :

$$f^3 + m^3 = f^3 + 3f^2e + m^3 - 3m^2a.$$

Nous éliminons également tout terme ayant une grandeur assignable:

$$0 = 3f^2e - 3m^2a.$$

D'où :

$$3f^2e = 3m^2a.$$

Ainsi,

$$f^2e = m^2a, \text{ et donc}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{m^2}{f^2}.$$

En remplaçant e par t, et a par m, nous obtenons

$$\frac{t}{m} = \frac{m^2}{f^2}.$$

×

× ×

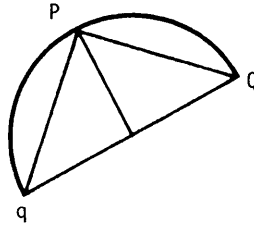
SECTION IV. LE PROBLEME DES QUADRATURES AVANT LEIBNIZ.

A. ARCHIMEDE ET LA QUADRATURE DE LA PARABOLE.

La parabole est une courbe qui résulte de la section d'un cône droit (cône obtenu par la rotation d'un triangle rectangle sur un des côtés de l'angle droit) par un plan parallèle à un plan tangent au cône.

Le problème que se pose Archimède, c'est de calculer l'aire comprise entre une parabole et une ligne droite, dans l'espèce entre la parabole PQq (voir Fig. 6) et la droite Qq.

(FIG. 6)



Les auteurs du 17^e siècle attaquaient ce problème en subdivisant l'aire en un nombre infini d'aires infiniment petites. (Le premier à avoir analysé une surface comme composée d'un nombre infini de surfaces infiniment petites est Grégoire de St. Vincent ; avant lui, Cavalieri avait analysé une surface comme composée d'une somme infinie de lignes de grosseur nulle, et avait analysé la ligne comme composée d'une somme infinie de points de longueur nulle, lignes et points appelés "indivisibles" ; Robertval, qui s'était inspiré de Cavalieri, analysait une surface comme composée d'une somme infinie de surfaces indivisibles, et analysait la ligne comme composée d'une somme infinie de lignes indivisibles).

Pour les Grecs il ne peut être question d'aborder le problème de cette manière. D'une part, la théorie des nombres n'est pas suffisamment avancée du temps des Grecs pour qu'ils puissent définir des sommes composées d'un nombre infini de termes (voir Boyer, p. 52) ; d'autre part, les Grecs évitent, pour des questions de rigueur, toute référence à des quantités dites "infiniment" petites ou "infiniment" grandes. Au lieu de recourir à une méthode de subdivision en infiniment petits ou en indivisibles, Archimède fait appel, à la suite d'Eudoxe et d'Euclide, à la méthode dite d'"exhaustion".

La méthode d'exhaustion consiste 1) à montrer comment on peut inscrire dans un cercle ou dans une aire comprise sous une courbe des polygones de plus en plus grands, et 2) à admettre qu'une telle construction peut mener à un polygone n tel que le segment⁽¹⁾ compris entre le polygone et la courbe soit aussi petit qu'on veut.

C'est Grégoire de St. Vincent qui a donné le nom de "méthode d'exhaustion" à la manière dont procède Archimède. En fait, le terme n'est pas heureux parce qu'il suggère que la méthode mène à

(1) Segment : portion de figure. Spécifiquement, portion de cercle comprise entre un arc et sa corde (corde : ligne droite qui aboutit aux deux extrémités d'un arc de cercle).

la construction d'un polygone qui serait exhaustif de l'aire en question. Or, chez Archimède, quel que soit le polygone considéré, il existe toujours un segment entre le polygone et la courbe en question, même si ce segment est par ailleurs aussi petit qu'on veut. D'autre part, un polygone exhaustif de l'aire serait nécessairement un polygone composé d'un nombre infini de côtés ; or, la méthode d'Archimède ne prévoit la construction que de polygones ayant un nombre n fini de côtés. En réalité, le terme choisi par Grégoire de St. Vincent s'applique davantage à sa propre méthode qui, elle, inscrit dans l'aire un polygone composé d'un nombre infini de côtés.

Ce qu'Archimède va montrer, c'est que tout segment limité par une parabole et une corde (1) Qp est égal au quatre tiers d'un triangle qui a la même base que le segment (la base du segment est la corde qui limite le segment) et la même hauteur (la hauteur du segment est la plus grande perpendiculaire tracée depuis la courbe vers la base).

Pour démontrer cette proposition, Archimède va faire appel à un lemme, lemme qui peut être démontré d'une manière purement arithmétique :

Soit une série de surfaces A, B, C, D...Z, dont A est la plus grande, chaque surface étant quatre fois plus grande que celle qui la suit immédiatement, alors

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3} Z = \frac{4}{3} A.$$

En effet, soit $b = \frac{1}{3} B$, $c = \frac{1}{3} C$, etc. Comme $b = \frac{1}{3} B$ et $B = \frac{1}{4} A$,

on obtient que $B + b = \frac{A}{4} + \frac{1}{3}(\frac{A}{4}) = \frac{3A + A}{12} = \frac{4A}{12} = \frac{A}{3}$. De même on

obtient que $C + c = \frac{B}{3}$, etc.

Il suit de là que

$$(B + C + \dots + Y + Z) + (b + c + \dots + y + z) = \frac{1}{3} (A + B + C + \dots + Y).$$

Or, $b + c + \dots + y = \frac{1}{3} (B + C + \dots + Y)$. D'où par soustraction,

$$B + C + \dots + Y + Z + z = \frac{1}{3} A. \quad \text{D'où, par addition de A,}$$

$$A + B + C + \dots + Y + Z + z = \frac{4}{3} A. \quad \text{Et ainsi, puisque } z = \frac{1}{3} Z,$$

$$A + B + C + \dots + Z + \frac{1}{3} Z = \frac{4}{3} A.$$

(1) Corde, voir note précédente.

Archimède va démontrer sa proposition, à savoir donc que

Tout segment limité par une parabole et une corde Qq est égal au quatre tiers d'un triangle qui a la même base que le segment et la même hauteur,

en utilisant une double réduction à l'absurde. Cette double réduction à l'absurde est liée à la méthode d'exhaustion de la manière suivante :

1) on suppose que l'aire en question (ici le segment limité par la parabole et la corde) est plus grande que la quantité donnée (ici les quatre tiers du triangle) ; on montre, ensuite, comment construire dans l'aire, par étapes successives, un polygone donné (ici un polygone tel que le segment résiduel est plus petit que la différence entre l'aire et la quantité donnée) ; on montre, enfin, que ce polygone a des propriétés incompatibles avec certaines propositions acquises antérieurement ;

2) on suppose que l'aire en question est plus petite que la quantité donnée ; on montre, ensuite, comment construire dans l'aire, par étapes successives, un polygone donné (ici un polygone tel que la somme des triangles inscrits dans le segment résiduel est plus petite que la différence entre l'aire et la quantité donnée) ; enfin, on montre que ce polygone a des propriétés incompatibles avec certaines propositions acquises antérieurement.

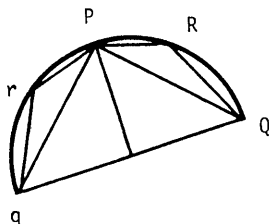
Cette méthode qui utilise conjointement l'exhaustion et la double réduction à l'absurde est appliquée par Archimède à chaque fois qu'il cherche à démontrer une proposition relative à la détermination de l'aire comprise sous une courbe (c'est de cette manière qu'il a en particulier procédé pour calculer la surface du cercle).

Démonstration de la proposition d'Archimède.

Soit $K = \frac{4}{3}$ (triangle PQq).

1. Supposons que le segment est plus grand que K.

Dans les segments PQ et Pq nous inscrivons des triangles qui ont comme sommets les sommets R et r (voir Fig. 7) du segment (le sommet d'un segment c'est le point de la courbe à partir duquel est tracée la plus grande perpendiculaire vers la base) ; dans les



(FIG. 7)

segments restants, nous inscrivons à nouveau des triangles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous obtenions des segments restants dont la somme est plus petite que la différence entre le segment PQq et K.

Il en suite que le polygone ainsi obtenu est plus grand que K.

Or, cela est impossible. En effet, soit A le triangle PQq, soit B la somme des triangles PRQ et Prq, et ainsi de suite. Le polygone obtenu est la somme des triangles $A + B + \dots + Z$. Or, on peut montrer que $A = 4B$, que $B = 4C$, et ainsi de suite. D'où il suit, en vertu du lemme, que $A + B + \dots + Z < \frac{4}{3} A$.

2. Supposons que le segment est plus petit que K.

Dans le segment PQq, nous inscrivons, par étapes successives, un polygone $A + B + \dots + X$, tel que X est plus petit que la différence entre K et le segment. En tant que le polygone est inscrit dans le segment, nous avons que $A + B + \dots + X < (\text{segment})$.

En vertu du lemme, nous avons que

$$A + B + \dots + X + \frac{1}{3} X = \frac{4}{3} A = K.$$

Il suit de là que

$$K = (A + B + \dots + X) + Y, \text{ où } Y < X, \text{ puisque } Y = \frac{1}{3} X.$$

D'autre part,

$K = (\text{segment}) + Y$, où $Y > X$, puisque X est plus petit que la différence entre le segment et K.

De ce qui précède, il résulte que

$(\text{segment}) < A + B + \dots + X$, ce qui est en contradiction avec ce qui précède.

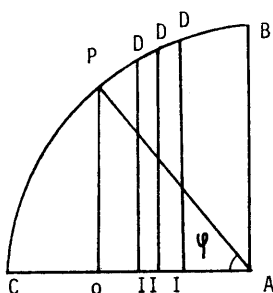
3. PASCAL ET LE TRAITE DES SINUS DU QUART DE CERCLE.

Dans un texte extrait du Traité des sinus du quart de cercle, Pascal veut montrer comment on peut calculer la somme des sinus d'un arc quelconque d'un quart de cercle.

Soit BP un arc quelconque du quart de cercle ABC (voir Fig. 8). Le rayon AC est appelé la base du quart de cercle. Soit

l'arc BP divisé par des points D en un nombre infini de petits arcs égaux DD. Traçons à partir des points P, D, les sinus DI vers la base AC (1). Ce qu'il faut montrer, c'est comment on peut calculer la somme des sinus DI.

(FIG. 8)



Pour Pascal, la somme des sinus DI est la somme infinie des petits rectangles, formés chacun d'une ligne DI et d'un même petit arc DD (considéré comme étendu en ligne droite). La somme des sinus doit être distinguée de ce que Pascal appelle la somme des ordonnées. La somme des ordonnées DI est la somme infinie des petits rectangles, formés chacun d'une ligne DI et d'une même petite partie II de la base OA. La somme des ordonnées est égale à l'aire comprise sous la courbe BP. La somme des sinus, au contraire, excède la somme des ordonnées.

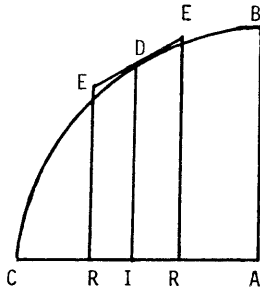
Ces points étant acquis, le théorème de Pascal est alors le suivant : la somme des sinus DI (chaque sinus étant multiplié par un des petits arcs égaux DD) est égale au segment AO (la portion de la base AC comprise entre les sinus extrêmes BA et PO) multiplié par le rayon AB.

-
- (1) Pour nous, le sinus de l'angle ϕ est un rapport, à savoir le rapport entre le côté opposé à l'angle et l'hypothénuse qui est ici le rayon ; donc $\sin \phi = \frac{PO}{AP}$ ou, si nous représentons le rayon par R, $\sin \phi = \frac{PO}{R}$. Pour Pascal, et pour tous les auteurs jusqu'au début du 18e siècle, le sinus de l'angle ϕ est une ligne, et non pas un rapport. C'est ce que nous exprimerions maintenant par $R \sin \phi$. Le sinus de l'angle ϕ , tel que Pascal l'entend, est donc : $R \sin \phi = R \cdot \frac{PO}{R} = PO$.

Pour démontrer ce théorème, Pascal fait appel à un lemme qui, comme on le verra plus loin à la section VI, a une grande importance du point de vue des origines de la découverte par Leibniz du calcul infinitésimal. Ce lemme est le suivant :

Soit un quart de cercle ABC (voir Fig. 9). Soit D un point quelconque de l'arc BC. Partant du point D, traçons le sinus DI vers la base AC. Soit alors DE la tangente au point D à l'arc BC, les points E étant choisis arbitrairement. Partant des points E, traçons les perpendiculaires ER à la base AC. Le rectangle formé par le sinus DI et la tangente EE est égal au rectangle formé par la portion de base AC comprise entre les deux parallèles ER, le segment RR donc, et le rayon AB.

(FIG. 9)



Utilisant ce lemme, Pascal démontre alors son théorème comme suit. A chaque point D de l'arc (voir Fig. 8), on trace une tangente DE ; chaque tangente rencontrera sa voisine aux points E. Partant des points E, on trace alors les perpendiculaires ER à la base AC. Il est clair, en vertu du lemme, que chaque sinus DI multiplié par la tangente EE est égal à la distance correspondante RR multipliée par le rayon AB. Or, toutes les tangentes EE sont égales entre elles, d'où il suit que la somme des sinus DI (chaque sinus étant multiplié par une des tangentes EE) est égale à la somme des distances RR multipliée par le rayon AB. Or, étant donné que le nombre des sinus DI est infini, chaque tangente EE est égale à un des petits arcs égaux DD, et, de même, la somme des distances RR est égale au segment AO.

La méthode de Pascal est donc essentiellement la suivante. La somme des sinus d'un arc quelconque d'un quart de cercle se présente sous la forme d'une somme infinie de termes, chaque

terme étant le produit d'un sinus DI et d'un même arc DD. Pascal montre que cette somme, qui ne peut pas être directement calculée comme telle, est égale à une somme qui, elle, est calculable, à savoir la somme dont les termes sont chacun le produit d'un sinus DI et d'une même tangente EE. Pour fonder l'égalité des deux sommes, Pascal s'appuie sur une idée que nous avons déjà rencontrée chez Archimède et chez Barrow dans le cadre du problème des tangentes, à savoir qu'un arc infiniment petit peut être identifié à une portion infiniment petite de la tangente à cet arc.

C. LA METHODE D'ISAAC BARROW.

Dans la onzième leçon de ses Lectiones Geometricae, Barrow adopte la méthode suivante pour calculer l'aire comprise sous une courbe.

On subdivise l'aire en un nombre infini de rectangles. Ces rectangles, qui ont chacun un de leurs côtés courbé, sont en fait des pseudo rectangles ; mais, parce qu'ils sont différentiels, c'est-à-dire infiniment petits, ces pseudo rectangles pourront être assimilés à de véritables rectangles.

On montre ensuite comment certaines des lignes de division (lignes qui ont été introduites, soit pour délimiter l'aire, soit pour subdiviser l'aire) permettent de définir une figure dont la surface peut être déterminée.

En s'appuyant alors essentiellement sur des rapports de similitude, on montre que chaque rectangle différentiel égale une partie différentielle de la figure, de telle manière que la somme des rectangles différentiels égale la somme des parties différentielles de la figure.

En un sens, la méthode adoptée par Barrow est celle qu'utilisait Pascal dans son Traité des sinus du quart de cercle pour calculer la somme des sinus d'un arc quelconque d'un quart de cercle. Ce qui caractérise la méthode de Pascal et de Barrow, par opposition à d'autres méthodes plus traditionnelles du 17^e siècle, c'est le passage, l'identification, d'une portion infiniment petite d'une courbe à une portion infiniment petite d'une droite. La méthode de Pascal, cependant, est directement liée à l'application particulière qu'il cherche à obtenir (la somme des sinus), et rien ne permet de penser que Pascal ait saisi l'importance que représente cette identification pour la compréhension du problème de la quadrature en général.

❖

❖

❖

SECTION V. LA DECOUVERTE PAR BARROW DU "THEOREME FONDAMENTAL".

A. LE "THEOREME FONDAMENTAL" DU CALCUL INFINITESIMAL.

Dans la section II, nous avons parlé de l'intégrale d'une fonction $y = f(x)$: de a à b , c'est-à-dire d'une valeur fixe $x = a$ à une valeur fixe $x = b$. Considérons maintenant l'intégrale d'une fonction $y = f(x)$ d'une valeur fixe $x = a$ à une valeur variable $x = u$. Cette intégrale, qui est une fonction de u , est notée $F(u)$ et est appelée une intégrale indéfinie : une telle intégrale exprime l'aire comprise sous une courbe $y = f(x)$ d'un point fixe $x = a$ à un point variable $x = u$.

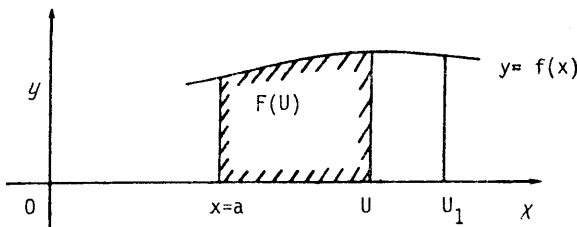
Le théorème fondamental dit que la dérivée de l'intégrale indéfinie $F(u)$ est égale à la valeur de la fonction $f(x)$ pour la valeur u de x :

$$F'(u) = \limite_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{F(u_1) - F(u)}{u_1 - u} = f(u)$$

Le théorème fondamental jette un pont entre le calcul différentiel et le calcul intégral. Il montre que la dérivée est par rapport à l'intégrale comme une différence par rapport à une somme : la dérivée peut annuler l'intégrale comme une différence peut annuler une somme.

La signification géométrique du théorème fondamental est la suivante. Soit une courbe $y = f(x)$ (voir fig. 10). L'intégrale indéfinie $F(u)$ exprime l'aire comprise sous la courbe entre le point fixe $x = a$ et un point variable $x = u$. L'intégrale indéfinie $F(u_1)$ exprime l'aire comprise sous la courbe entre le point fixe $x = a$ et un point variable $x = u + \Delta u = u_1$. La différence $F(u_1) - F(u)$ entre les deux intégrales indéfinies exprime donc l'aire comprise sous la courbe entre les points u et u_1 . Ce que dit alors le théorème fondamental, c'est que lorsque le point u_1 se rapproche indéfiniment du point u , l'aire $F(u_1) - F(u)$ tend vers $(u_1 - u)f(u)$, c'est-à-dire le triangle ayant comme base $u_1 - u$ et comme hauteur $f(u)$, la hauteur de la courbe au point u .

(FIG. 10)



rectangle a comme largeur un sous-intervalle Δx de l'intervalle entre a et b. Admettons maintenant que chaque rectangle a, d'autre part, comme hauteur, la hauteur $f(x)$ de droite de la portion d'aire à laquelle il correspond. Nous pouvons alors exprimer la somme S_n des rectangles comme suit :

$$S_n = f(x_1) \Delta x_0 + f(x_2) \Delta x_1 + \dots + f(x_n) \Delta x_{n-1},$$

$$\text{où } a = x_1 - \Delta x_0 \text{ et } b = x_n.$$

La limite de cette somme, lorsque le nombre des rectangles croît indéfiniment, de telle manière que chaque largeur de rectangle Δx tend vers zéro, est désignée par

$$\int_a^b f(x) dx,$$

"l'intégrale de la fonction $y = f(x)$ de a à b".

Revenons maintenant au théorème de Barrow.

Admettons que la courbe ZGE soit donnée par la fonction $y = f(x)$, et la courbe VIF par la fonction $z = g(x)$. On peut alors désigner DE par y, et DF par z.

Or, le théorème de Barrow contient les données suivantes :

a) l'aire VDEZ est le produit de la longueur R et de la distance DF ; d'autre part, conformément à la méthode des quadratures propre à Barrow (voir section IV, C), on peut considérer l'aire VDEZ comme une somme infinie de rectangles, rectangles dont les largeurs respectives sont des parties infiniment petites de l'axe VD, et dont les hauteurs respectives sont des ordonnées de la courbe ZGE à l'axe VD. Ce qui précède nous autorise à écrire :

$$Rz = \int_0^x f(x) dx \quad (1) ;$$

b) le rapport $\frac{DE}{DF}$ est égal au rapport $\frac{R}{DT}$; cette égalité peut être formulée comme suit :

$$\frac{y}{z} = \frac{R}{DT} \quad (2) ;$$

c) TF est tangente à la courbe VIF ; on peut donc admettre, conformément à la méthode des tangentes propre à Barrow (voir section III, B), que, pour un point K infiniment proche du point F, le rapport $\frac{DF}{DT}$ est égal au rapport $\frac{LF}{LK}$; cette égalité peut être formulée comme suit :

$$\frac{z}{DT} = \frac{dz}{dx} \quad (3).$$

A partir des points (1), (2) et (3), on peut déduire le théorème fondamental du calcul infinitésimal sous la forme

$$y = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x) dx.$$

En effet, en vertu de (3) on a :

$$DT = \frac{z}{\frac{dz}{dx}} = z \cdot \frac{dx}{dz}.$$

En remplaçant, dans (2), DT par $z \cdot \frac{dx}{dz}$, on obtient :

$$\frac{y}{z} = \frac{R}{z \cdot \frac{dx}{dz}}$$

D'où

$$y = \frac{z \cdot R}{z \cdot \frac{dx}{dz}} = \frac{R}{\frac{dx}{dz}} = R \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dRz}{dx}.$$

Ce qui en vertu de (1) donne :

$$y = \frac{d}{dx} \int_0^x f(x) dx.$$

::

:: ::

SECTION VI. LA DECOUVERTE PAR LEIBNIZ DU CALCUL INFINITE- ----- SIMAL.

La découverte du calcul infinitésimal a été inspirée à Leibniz par la lecture d'un texte de Pascal extrait du Traité des sinus du quart de cercle. Dans la démonstration d'un lemme, lemme dont il a été question dans la section IV, C, Pascal fait référence à un triangle EEK (voir Fig. 12), formé en traçant, à partir du point E de gauche vers la perpendiculaire ER de droite, une parallèle à la base AC. Leibniz appellera un tel triangle, un triangle caractéristique. L'hypothénuse de ce triangle est formé de la tangente au quart de cercle, ou, d'une manière générale, de la tangente à une courbe. Lorsque le

185), parce que Child a lui-même, à l'aide d'un appareil conceptuel moderne, transposé les démonstrations de Barrow en des démonstrations de type algébrique. D'autre part, quand Leibniz présentera son calcul différentiel ou "calcul des différences", il ne se limitera pas, comme le fait Barrow dans sa méthode des tangentes, à l'énoncé de règles de calcul ; au contraire, chez Leibniz, les règles de calcul ne sont pas premières, mais découlent d'une théorie préalable sur la nature des "différences" et leurs propriétés opératoires.

=====