Modèles de Kripke

Michel Moreau

0. Introduction

Le but de ces notes est d'exposer l'abord sémantique de la logique intuitionniste proposée par Saul KRIPKE lors du huitième Logic Colloquium (Oxford, juillet 1963). Nous suivons essentiellement le texte de Kripke, édité dans les Actes du colloque (cfr (1)), mais nos notations seront plus proches de celles de Melvin Fitting (cfr (2)). (C'est au travail très complet et détaillé de Fitting que nous renvoyons tout lecteur désireux d'élargir son horizon). Nous ferons, chemin faisant, un large crochet par les tableaux de Beth pour le calcul intuitionniste des prédicats, qui nous servira à amener le théorème de complétude (sans démonstration). La métalogique de l'exposé sera constamment classique.

1. Motivations

L'univers intuitionniste peut se penser comme une collection d'"états de connaissance". Chaque état est constitué de l'ensemble des objets construits par un "sujet créateur" jusqu'à ce moment, et de ce qu'on peut savoir avec "évidence" de ces objets à ce moment. Le sujet créateur étant essentiellement dynamique, il profite du temps qui va pour élargir son domaine d'évidences, passant d'un état de connaissance à un autre, plus riche, dans lequel rien du précédent ne peut être oublié, l'évidence présentant l'éternité sous sa guise inchoative.

Nous conviendrons de relier entre eux les divers états de connaissance d'un même sujet créateur selon l'ordre de leur succession, meublant ainsi l'univers intuitionniste de chaînes dirigées le long desquelles les évidences d'un sujet s'accroissent.
Notre point de vue ne pouvant être celui de la science achevée, le futur d'un sujet créateur s'ouvre sur divers possibles, selon l'éventail des évidences encore à conquérir, et donc, par le fait même, maintenant indécidables. Une chaîne d'états de connaissance admet ainsi des ramifications, présentant la structure classique

des branches d'un arbre.

Dans un contexte strictement Brouwerien, on ne reconnaîtra d'existence qu'à un unique sujet créateur, et comme le caractère cumulatif des états de connaissance successifs permet de négliger tous les états qui précèdent l'état présent, qui les récapitule tous en lui, l'univers intuitionniste prendra l'aspect d'un unique arbre ayant un état origine, et allant se compliquant selon l'hésitation des évidences à venir. Ces restrictions ne sont cependant pas essentielles, au sens où les rejeter ou les adopter ne modifie pas la notion de validité que nous allons définir en nous inspirant des remarques qui précèdent.

2. Formalisation

Supposons donnés un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre, et l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules de $\mathcal{L}$. Nous appellerons

Modèle (intuitionniste) de Kripke :

la donnée $\langle E, p, \delta, \models \rangle$

a) d'un ensemble E (des états de connaissance) ;

b) d'une relation p d'ordre partiel sur E (i.e. réflexive, transitive et antisymétrique.) (Pour Γ et Δ dans E, on notera $\Gamma p \Delta$ le fait que l'état de connaissance Γ est ou précède l'état Δ).

c) d'une application δ de E dans les ensembles (qui fait correspondre, à chaque état Γ l'ensemble $\delta(\Gamma)$ des objets construits jusqu'en l'état Γ).

δ doit satisfaire à la condition :

pour tout Γ , Δ dans E

$$\Gamma \; p \; \Delta \Rightarrow \delta(\Gamma) \subseteq \delta(\Delta)$$

d) d'une relation $\models$ entre E et $\mathcal{F}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous états Γ, Δ dans E, pour tout n-uple $\bar{a} = (a_1 \ldots a_n)$

d'éléments de $\bigcup_{\Delta \in E} \delta(\Delta)$ et

pour toutes formules φ, ψ dans $\mathcal{F}$ on a

o. $\Gamma \models \varphi[\bar{a}] \Rightarrow \bar{a} \subset \delta(\Gamma)$

(où $\varphi[\bar{a}]$ note le résultat de la substitution dans $\varphi(x_1, \dots x_n)$ de a_i à x_i);

1. $\Gamma \models \varphi$ et $\Gamma \, p \, \Delta \Longrightarrow \Delta \models \varphi$
2. $\Gamma \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ et $\Gamma \models \psi$
3. $\Gamma \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ ou $\Gamma \models \psi$
4. $\Gamma \models \neg\varphi \Leftrightarrow$ pour tout Δ dans E, si $\Gamma \, p \, \Delta$, on n'a pas $\Delta \models \varphi$
5. $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow$ pour tout Δ, si $\Gamma \, p \, \Delta$ et si $\Delta \models \varphi$ alors $\Delta \models \psi$
6. $\Gamma \models (\exists \bar{x}) \, \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow$ il existe $\bar{a} \subset \delta(\Gamma)$ tel que $\Gamma \models \varphi[\bar{a}]$
7. $\Gamma \models (\forall \bar{x}) \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow$ pour tout Δ tel que $\Gamma \, p \, \Delta$ et pour tout $\bar{a} \subset \delta(\Delta)$, $\Delta \models \varphi[\bar{a}]$.

Une formule $\varphi[\bar{a}]$ est dite valide dans le modèle $\langle E, p, \delta, \models \rangle$ si pour tout $\Gamma \in E$ tel que $\bar{a} \subset \delta(\Gamma)$, on a $\Gamma \models \varphi[\bar{a}]$.

φ est valide si elle l'est dans tout modèle.

Nous allons formuler quelques remarques pour éclairer cette définition au jour de ce qui a été dit des motivations.

1. L'ensemble E, muni de la relation p, est chargé de représenter l'ensemble des états de connaissance et les chaînes qui les relient : $\Gamma \, p \, \Delta$ ssi Γ est ou précède Δ , Δ étendant les connaissances de Γ , l'extension pouvant être nulle si Δ est Γ . Le fait d'exiger que p soit réflexive permet d'alléger certaines conditions ; ainsi les conditions 4, 5 et 7 seraient éventuellement vides si Γ était un état terminal, sans successeur, et l'on devrait ajouter explicitement ces conditions écrites pour Γ.

Notons qu'en général (cfr (1) et (2)), on n'exige pas que p soit antisymétrique (x p y et y p $x \Rightarrow x = y$) : rien ne s'oppose alors à l'existence d'une boucle (Γ p Δ, Δ p ∇, ∇ p Γ, par exemple) dans la succession des états de connaissance, une telle boucle étant pourtant peu compatible avec nos motivations, un changement d'état correspondant à un progrès. En fait, le gain en généralité d'une définition qui n'imposerait pas l'antisymétrie pour p n'est qu'apparente : il est facile de transformer un modèle de M non préordonné en un modèle M^* préordonné qui valide exactement les mêmes formules que M (il suffit d'écraser chaque boucle sur un de ses éléments, puisqu'il est clair que si $\Gamma \models \varphi$, alors pour tout Δ dans une boucle contenant Γ, on a aussi $\Delta \models \varphi$, et sous les mêmes conditions $\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Delta \not\models \varphi$.)
Pour des raisons techniques, on se restreint parfois à ne considérer que des arbres au sens strict : ensembles préordonnés avec élément initial précédant tous les autres (cfr (1)). Cette restriction est sans conséquence pour la notion de validité.

2. L'application δ associe à chaque état de connaissance l'ensemble des objets déjà construits dans cet état : bien entendu, tout objet construit en l'état Γ est conservé dans les états étendant Γ ; c'est le sens de la condition imposée sur δ .

3. La relation $\models$, généralement lue "force" dans ce contexte, est chargée de lier états de connaissance et formules du langage $\mathcal{L}$: $\Gamma \models \varphi$ si les évidences conquises à l'état Γ permettent une démonstration effective de φ .

La condition o) exprime que $\varphi[\bar{a}]$ ne peut être soutenue à bon droit à l'état Γ si elle parle d'objets $\bar{a} = (a_1 \ldots a_n)$ qui n'ont pas encore été construits en Γ.

La condition 1) impose que ce qui a été soutenu en Γ soit désormais soutenu dans tout état étendant Γ : c'est l'aspect éternel des évidences. (Cette condition peut être restreinte aux formules atomiques ; on déduit alors sa validité pour une formule quelconque par induction sur la construction de cette formule).

Les conditions 2, 3 et 5 sont classiques : une conjonction, une disjonction ou une existentielle se décident au moment même.
Par contre, la condition 4 fait appel à tous les futurs de Γ, car soutenir $\neg\varphi$ aujourd'hui impose qu'on soutienne $\neg\varphi$ dans tout futur, et comme il est exclu d'admettre une contradiction, il convient de s'assurer que jamais de nouvelles évidences étendant Γ ne conduiront à soutenir φ. Il en va de même pour la condition 5 : il faut que dans tout état étendant Γ, si φ peut être soutenue, ψ puisse l'être aussi. Enfin, la condition 7 exige qu'on ne juge pas l'universalité d'une proposition seulement au vu des seuls objets construits en Γ, mais qu'on prenne en considération tous les objets qui pourront être construits dans les états ultérieurs.

4. On vérifiera sans peine que si l'ensemble E est réduit à un seul élément, les conditions 4, 5 et 7 se ramènent aux conditions classiques habituelles. Le logicien classique est un intuitionniste sans avenir ...

3. Premières applications.

Voici quelques modèles très élémentaires servant de contre exemple pour certaines tautologies classiques :

a : le tiers exclu : $\varphi \vee \neg \varphi$

on utilise un modèle $(E,\ p,\ \delta\ ,\models)$ ainsi constitué :

$E = \{\Gamma_1 , \Gamma_2\}$

$p = \{(\Gamma_1,\Gamma_1),(\Gamma_1,\Gamma_2),(\Gamma_2,\Gamma_2)\}$, id est Γ_1 précède Γ_2 ;

δ quelconque;

$\models = \{(\Gamma_2,\varphi)\}$,id est $\Gamma_2 \models \varphi$

On visualise ce modèle ainsi

$$\Gamma_1 \bullet \longrightarrow \overset{\varphi}{\bullet}\ \Gamma_2$$

Dans ce modèle, on n'a pas $\Gamma_1 \models \varphi$ (φ n'étant pas démontrable en Γ_1), et on n'a pas non plus $\Gamma_1 \models \neg\varphi$ (puisque $\Gamma_2 \models \varphi$!).
On n'a donc pas $\Gamma_1 \models \varphi \vee \neg\varphi$, et $\varphi \vee \neg\varphi$ n'est pas valide.

b : $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

On utilise le modèle $(E,\ p,\ \delta\ ,\models)$ déterminé par :

E, p et δ comme en a ;

$\models \ = \{(\Gamma_1,\psi),(\Gamma_2,\psi),(\Gamma_2,\varphi)\}$

$$\underset{\Gamma_1}{\overset{\psi}{\bullet}} \longrightarrow \underset{\Gamma_2}{\overset{\psi,\varphi}{\bullet}}$$

Dans ce modèle $\Gamma_1 \models (\neg\varphi \to \neg\psi)$, puisque dans aucune extension de Γ_1 , y compris Γ_1 , on n'a $\neg\varphi$, mais on n'a pas $\Gamma_1 \models (\psi \to \varphi)$, puisque $\Gamma_1 \models \psi$ mais $\Gamma_1 \not\models \varphi$.

Remarque : tout ici semble se jouer en Γ_1 : il n'est cependant pas possible de réduire le modèle au seul point Γ_1 , puisque dans ce cas Γ_1 n'ayant aucun futur, on devrait adjoindre $\neg\varphi$ aux évidences de Γ_1, et on n'aurait plus $\Gamma_1 \models \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$, n'ayant pas $\Gamma_1 \models \neg\psi$. La présence d'un Γ_2 à venir permet de surseoir à la nécessité d'opter dès Γ_1 pour φ ou $\neg\varphi$.

c : $\neg(\forall x)\varphi(x) \rightarrow (\exists x)\neg\varphi(x)$.

Modèle : $(E, p, \delta, \models)$

E et p comme en a ;

δ : $\delta(\Gamma_1) = \{a\}$; $\delta(\Gamma_2) = \{a, b\}$

$\models \; = \{(\Gamma_2, \varphi[\bar{a}])\}$

$$\underset{\Gamma_1, \{a\}}{\bullet} \longrightarrow \overset{\varphi[\bar{a}]}{\underset{\Gamma_2, \{a,b\}}{\bullet}}$$

On voit facilement que $\Gamma_1 \models \neg(\forall x)\varphi(x)$, alors qu'on n'a pas $\Gamma_1 \models (\exists x)\neg\varphi(x)$ (puisqu'on n'a pas $\Gamma_1 \models \neg\varphi[\bar{a}]$!).

4. Les tableaux de BETH et le théorème de complétude

Les procédures dénommées tableaux de BETH ou tableaux sémantiques sont bien connues dans le cas classique : elles consistent à expliciter les conditions de fabrication d'une formule, et, selon que toutes ces conditions imposent ou non une contradiction, on conclut que la formule est ou non valide. Afin que toutes ces conditions soient prises en compte systématiquement, selon leurs enchaînements ou leurs alternations, on recourt à la mise en scène des tableaux : dans chaque tableau, la moitié droite figure l'antre du faux, et la moitié gauche les plaines de la vérité. Si la formule φ que vous supposez fausse - et écrivez par conséquent dans la partie droite de votre tableau - est de la forme $\psi \vee \chi$, vous écrirez également dans la partie droite ψ , et χ , puisque la fausseté simultanée de ψ et de χ est une condition nécessaire et suffisante de la fausseté de φ. On peut symboliser cette démarche par le schéma suivant :

	$\cancel{\psi \vee \chi}$
	ψ , χ

(où $\psi \vee \chi$ est biffée, puisque toute l'information donnée par sa présence à la droite du tableau est restituée par la présence à droite de ψ et χ .)

Si φ avait été de la forme $\psi \wedge \chi$, sa fausseté pouvait découler, indépendamment, de celle de ψ , ou de celle de χ . Afin de tenir compte de ces deux possibilités, on convient de scinder le tableau d'origine en deux "tableaux alternatifs", l'usage voulant qu'on scinde la part "vrai" (gauche) en deux, la part "faux" (gauche) en deux également, la moitié gauche (resp. la moitié droite) du vrai formant avec la moitié gauche (resp. droite) du faux le premier (resp. second) tableau de l'alternative.

On aura donc :

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">T_0</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\cancel{\psi \wedge \chi}$</td></tr>
<tr><td>T_{01}</td><td>T_{02}</td><td>T_{01}</td><td>T_{02}</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>ψ</td><td>χ</td></tr>
</table>

où T_{01} et T_{02} sont "sous-tableaux" de T_0. En tant que prolongement de T_0, T_{01} et T_{02} contiennent tout ce que contenait T_0. Si Γ

et Δ représentent les autres formules présentes dans T_o , le schéma ci-dessus devient :

<table>
<tr><th colspan="4">T_0</th></tr>
<tr><td colspan="2">Γ</td><td colspan="2">$\Delta, \cancel{\psi \wedge \chi}$</td></tr>
<tr><td>T_{01}</td><td>T_{02}</td><td>T_{01}</td><td>T_{02}</td></tr>
<tr><td>Γ</td><td>Γ</td><td>Δ, ψ</td><td>Δ, χ</td></tr>
</table>

les autres règles de déconstruction des formules dans le cas classique sont bien connues et découlent naturellement du sens des connecteurs logiques. Le fait d'obtenir dans un même tableau, par application mécanique de ces règles, une même formule φ à la fois à droite et à gauche constitue clairement une contradiction, qui met fin au jeu dans ce tableau : ce tableau est dit clôturé. Si tous les tableaux qu'il a fallu construire, en vertu des règles, pour déconstruire une formule φ supposée fausse peuvent être clôturés, on conclut que φ doit être tenue pour vraie.

L'univers intuitionniste étant plus riche que le simple vrai-faux du monde classique, les règles gouvernant les tableaux de Beth y sont naturellement plus complexes. Pour rester dans l'ambiance des motivations énoncées tout au début, nous dirons que la partie gauche d'un tableau contient des formules pour lesquelles on dispose d'une démonstration effective au moment où ce tableau est établi, alors que la portion droite contient des formules pour lesquelles une telle démonstration n'existe pas à ce moment. Le jeu revient alors à recenser non plus les manières d'infirmer une formule, mais des modes sous lesquels une formule peut "manquer de démonstration". Si φ ne peut manquer de démonstration qu'au prix d'une contradiction (dans tout tableau servant à déconstruire φ, on trouve une formule présente à gauche et à droite, i.e. qui simultanément a et n'a pas de démonstration), un principe de cohérence impose d'accepter φ comme démontrée.

Pour certaines formules, par exemple de la forme $\neg\varphi$, manquer de démonstration aujourd'hui renvoie à des états de connaissance plus étendus, dans lesquels φ aura une démonstration. Ceci explique que les règles de formation des tableaux intuitionnistes comportent, en plus de la technique de scission d'un tableau en tableaux alternatifs synchrones, celle de création de tableaux nouveaux, étagés selon la diachronie des états de connaissance.

Voici ces règles de formation :

$\wedge_g$: Si $\varphi \wedge \psi$ apparaît à gauche dans le tableau T, inscrire φ et ψ à gauche dans T et biffer $\varphi \wedge \psi$;

$\wedge_d$: Si $\varphi \wedge \psi$ apparaît à droite dans le tableau T, dédoubler T en deux tableaux alternatifs, T_1 et T_2: dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \wedge \psi$, et ajouter φ (resp. ψ) à droite ;

$\vee_g$: Si $\varphi \vee \psi$ apparaît à gauche dans T, dédoubler T en T_1 et T_2 : dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \vee \psi$, et ajouter φ (resp. ψ) à gauche ;

$\vee_d$: Si $\varphi \vee \psi$ apparaît à droite dans T, écrire φ et ψ à droite dans T et biffer $\varphi \vee \psi$;

$\neg_g$: Si $\neg\varphi$ apparaît à gauche dans T, écrire φ à droite dans T et biffer $\neg\varphi$;

$\neg_d$: Si $\neg\varphi$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S : y transcrire à gauche toute la part gauche de T ainsi que φ (S est un tableau succédant à T, et tout ce qui a une démonstration en T en a forcément une en S), biffer $\neg\varphi$ dans T et poursuivre la déconstruction dans T et S séparément;

$\rightarrow_g$: Si $\varphi \rightarrow \psi$ apparaît à gauche dans T, dédoubler T en T_1 et T_2 : dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \rightarrow \psi$, et ajouter ψ à gauche (resp. φ à droite) ;

$\rightarrow_d$: Si $\varphi \rightarrow \psi$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S succédant à T et y transcrire, à gauche, toute la part gauche de T ainsi que φ , et à droite ψ ;

Pour les formules quantifiées il convient, comme dans le cas classique d'introduire des symboles pour objet a, b, c,... (constituant le "domaine" du tableau), en respectant les règles suivantes : à l'ouverture du tableau initial, on admet un unique objet a ; les autres objets sont introduits seulement si cela est imposé par une des règles $\forall_d$ et $\exists_g$ ci-après : tout objet présent dans T est présent dans tous les tableaux alternatifs obtenus par scission à partir de T, et dans tous les tableaux succédant à T.

$\forall_g$: Si $\forall x\, \varphi(x)$ apparaît à gauche dans T, écrire $\varphi(a)$ à gauche dans T pour tout objet a présent dans T : si un nouvel objet b est introduit par après dans T ou dans un tableau succédant à T, il convient d'écrire également $\varphi(b)$ à gauche dans ce tableau, et pour cette raison on ne biffera pas $\forall x\, \varphi(x)$;

$\forall_d$: Si $\forall x\, \varphi(x)$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S succédant à T : si a est un symbole d'objet n'étant encore apparu dans aucun tableau de la construction en cours a est introduit comme nouvel objet présent dans S, où on recopie, à gauche toute la portion gauche de T, et à droite $\varphi(a)$: biffer $\forall x\, \varphi(x)$ dans T ;

$\exists_g$: Si $\exists x\, \varphi(x)$ apparaît à gauche dans T, et si a est un symbole d'objet n'étant encore apparu dans aucun tableau de la construction en cours, a est introduit comme nouvel objet présent dans T, et $\varphi(a)$ inscrite à gauche dans T : biffer $\exists x\, \varphi(x)$;

$\exists_d$: Si $\exists x\, \varphi(x)$ apparaît à droite dans T, écrire $\varphi(a)$ à droite dans T pour tout objet a présent dans T, ou tout objet nouveau : ne pas biffer $\exists x\, \varphi(x)$.

Un tableau est dit clôturé dès qu'une même formule y apparaît à gauche et à droite, et on stoppe alors sa construction ; une suite de tableaux successifs est clôturée si l'un de ses tableaux l'est ; un ensemble de tableaux alternatifs est clôturé si tous ses tableaux le sont (plus exactement toutes ses suites de tableaux le sont). Une construction est clôturée si tous les tableaux alternatifs le sont.

Voici deux exemples qui permettront au lecteur non familier de mieux percevoir le fonctionnement des tableaux.

Considérons tout d'abord la tautologie intuitionniste

$$(\varphi \vee \forall x\, \psi(x)) \to \forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$$

Tableau de départ : T avec $\{a\}$ pour domaine :

T, $\{a\}$	
	$\varphi \vee \forall x\, \psi(x) \to \forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$

Application de $\to_d$: création d'un nouveau tableau S succédant à T avec même domaine

	S, $\{a\}$			
	$\cancel{\varphi \vee \forall x\, \psi(x)}$		$\cancel{\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))}$	
application de $\vee_d$	S_1	S_2	S_1	S_2
	φ	$\forall x\, \psi(x)$ $\psi(a)$	$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$	$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$

application de $\forall_d$: création d'un tableau R_1 succédant à S_1, et d'un tableau R_2 succédant à S_2 : domaine de R_1 : $\{a, b\}$; domaine de R_2 $\{a, c\}$

R_1, $\{a, b\}$	
$\underline{\varphi}$	$\cancel{\varphi \vee \psi(b)}$
	$\underline{\varphi}$, $\psi(b)$

clôturé

R_2, $\{a, c\}$	
$\forall x\, \psi(x)$ $\psi(a)$, $\underline{\psi(c)}$	$\cancel{\varphi \vee \psi(c)}$
	φ, $\underline{\psi(c)}$

clôturé

Les suites de tableaux (T, S, S_1, R_1) et (T, S, S_2, R_2) sont toutes deux clôturées puisque R_1 et R_2 le sont : l'ensemble alternatif $(T, S_1, R_1), (T, S_2, R_2)$ l'est aussi puisque chaque suite l'est.

Considérons par contre la formule converse

$$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x)) \rightarrow \varphi \vee \forall x\, \psi(x)$$

qui n'est pas une tautologie intuitionniste :

<table>
<tr><th colspan="2">$T, \{a\}$</th></tr>
<tr><td></td><td>$\forall x(\varphi \vee \psi(x)) \rightarrow \varphi \vee \forall x\, \psi(x)$</td></tr>
</table>

création de S $(\rightarrow d)$

<table>
<tr><th colspan="2">$S, \{a\}$</th></tr>
<tr><td>$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$</td><td>$\cancel{\varphi \vee \forall x\, \psi(x)}$
$\varphi, \forall x\, \psi(x)$</td></tr>
</table>

création de R $(\forall d)$

<table>
<tr><th colspan="6">$R, \{a,b\}$</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$
$\varphi \vee \psi(a)$, $\cancel{\varphi \vee \psi(b)}$</td><td colspan="3">$\psi(b)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">R_1</td><td>R_2</td><td colspan="2">R_1</td><td>R_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\cancel{\varphi \vee \psi(a)}, \varphi$</td><td>$\varphi \vee \psi(a), \underline{\psi(b)}$</td><td colspan="2">$\psi(b)$</td><td>$\underline{\psi(b)}$</td></tr>
<tr><td>R_{11}</td><td>R_{12}</td><td rowspan="2">clôturé</td><td>R_{11}</td><td>R_{12}</td><td rowspan="2">clôturé</td></tr>
<tr><td>φ</td><td>$\psi(a), \varphi$</td><td>$\psi(b)$</td><td>$\psi(b)$</td></tr>
</table>

R_{11} et R_{12} sont non clôturables, donc (T, S, R, R_1) et finalement toute la construction.

Il est assez facile de transposer la situation décrite par un tableau de Beth non clôturé en un contre exemple au sens des modèles de Kripke. Pour le voir, reprenons l'exemple c du § 3 :

$$\neg \forall x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg \varphi(x)$$

$T, \{a\}$

	$\neg \forall x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg \varphi(x)$

($\rightarrow_d$) création de S

$S, \{a\}$

$\neg \forall x\, \varphi(x)$	$\exists x\, \neg \varphi(x)$
($\exists_d$)	$\neg \varphi(a)$

($\neg_d$) création de R

$R, \{a\}$

$\neg \forall x\, \varphi(x)$, $\varphi(a)$	
($\neg_g$)	$\forall x\, \varphi(x)$

($\forall_d$) création de Q

$Q, \{a, b\}$

$\varphi(a)$	$\varphi(b)$

Q n'est pas clôturable.

Considérons le modèle de Kripke (E, p, δ, $\models$) suivant :

E = {T, S, R, Q} : P est la plus petite relation réflexo-transitive contenant {(T, S), (S, R), (R, Q)} (donc T précède S qui précède R qui précède Q).

$\delta(T) = \delta(S) = \delta(R) = \{a\}$; $\delta(Q) = \{a, b\}$

$R \models \varphi(a)$ et $Q \models \varphi(a)$

$$\begin{tikzcd} T, \{a\} \arrow[r] & S, \{a\} \arrow[r] & \overset{\varphi(a)}{R, \{a\}} \arrow[r] & \overset{\varphi(a)}{Q, \{a, b\}} \end{tikzcd}$$

Dans ce modèle, on a $T \models \neg \forall x\ \varphi(x)$, puisque dans toute extension U de T on n'a jamais que dans une extension ultérieure V de U, pour tout objet v de V, $V \models \varphi(v)$, puisque $Q \not\models \varphi(b)$. Par contre $T \not\models \exists x\ \neg \varphi(x)$, puisque $T \not\models \neg \varphi(a)$. Ce contre-modèle (obtenu en prenant pour états de connaissance les tableaux, dans leur succession, et pour connaissances à un état donné les formules atomiques figurant à gauche dans le tableau correspondant) est assez proche de celui proposé dans l'exemple c au § 3 :

$$\begin{tikzcd} T_1, \{a\} \arrow[r] & \overset{\varphi(a)}{T_2, \{a, b\}} \end{tikzcd}$$

Il va de soi que le passage des tableaux de Beth aux modèles de Kripke ne saurait conduire à un modèle naturel ou canonique, puisque l'ordre d'application des règles de déconstruction d'une formule n'est pas fixé. Ces indications informelles font cependant pressentir que toute formule donnant lieu à une construction en tableaux de Beth non clôturable peut être montrée non valide pour la modélisation de Kripke. On dispose en fait du résultat suivant (cfr[1]) :

<u>Proposition 1</u> : Une formule du calcul des prédicats intuitionnistes est valide pour les modèles de Kripke ssi elle donne lieu à une construction par tableaux de Beth clôturée.

On trouvera également dans [1] la démonstration détaillée de la

<u>Proposition 2</u> : Si une formule de calcul des prédicats intuitionniste donne lieu à une construction par tableaux de Beth clôturée, alors elle est démontrable dans le calcul des prédicats intuitionniste .

Du fait que les axiomes du calcul des prédicats intuitionniste sont valides pour la modélisation de Kripke, et que les règles de déduction préservent la validité, on déduit que toute formule démontrable doit être valide. Tout ceci conduit au

<u>THEOREME DE COMPLETUDE</u> : Une formule est démontrable dans le calcul des prédicats intuitionniste ssi elle est valide au sens des modèles de Kripke.

BIBLIOGRAPHIE

[1] <u>Formal Systems and Recursive Function</u> (Proceedings of the eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963) ed. by Crossley - Dummett, North-Holland, Amsterdam, 1965 (Le texte de Kripke y figure aux pages 92 à 130, sous le titre Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I).

[2] Melvin Fitting, <u>Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing</u>, North-Holland, Amsterdam, 1969.