

DEDUCTION NATURELLE

J.L. MOENS

G. BIBLIOGRAPHIE

- (1) Collected papers of G. Gentzen. Edited by M.E. Szabo. North-Holland, 1969.
- (2) Natural deduction. D. Prawitz. Almqvist and Wiksell, 1966.
- (3) Ideas and results in proof theory, D. Prawitz, in Proceedings of the second Scandinavian logic symposium. Edited by J.E. Fenstad, North Holland, 1971.

I. INTRODUCTION

La théorie de la démonstration est née avec le projet de Hilbert de démontrer la consistance des mathématiques. En gros, son idée était la suivante : il considérait les preuves mathématiques comme des objets mathématiques constitués d'une suite de symboles concrets. Prouver la consistance revenait alors à montrer qu'aucune suite de symboles ne pouvait se terminer par $0 = 1$, par exemple. Ceci amenait à une démonstration finitiste de la consistance des mathématiques à l'intérieur d'elles-mêmes, de même qu'il existe une démonstration finitiste de l'énoncé : il n'y a pas de nombre rationnel égal à $\sqrt{2}$.

Malheureusement, le théorème d'incomplétude de Gödel est venu mettre un point final à cet espoir. Ce théorème affirme qu'il n'est pas possible de prouver la consistance d'une théorie T comprenant la théorie élémentaire des nombres à l'intérieur de T , c'est-à-dire en n'utilisant que les techniques permises dans T .

Ce théorème oblige donc un changement de programme de Hilbert : il faut s'intéresser aux consistances relatives et non plus à la consistance en général. C'est l'objet de ce qu'on appelle "la théorie

réductive de la démonstration". Son but est donc de réduire la consistance d'une théorie à celle d'une autre; elle se propose d'atteindre ce but par l'étude des preuves dans la théorie en question. Pour que les résultats obtenus par ces techniques soient intéressants, il faut encore que l'étude des preuves n'utilise que des principes plus élémentaires que ceux de la théorie étudiée.

Tout ceci nécessite une connaissance de ce qu'est une preuve. C'est le sujet d'investigation de la "théorie générale de la démonstration". Cette théorie fournit des formalisations de la notion de preuve et s'intéresse à leurs propriétés. Nous allons étudier ici une de ces formalisations, dues à Gentzen (1934) (1), appelée système de déduction naturelle. Les démonstrations sont formalisées par des arbres qu'on appelle dérivations. Toute dérivation est une suite d'applications de règles atomiques (les schémas de déduction) qui sont relatives à un seul connecteur et où intervient la constructibilité si importante pour un intuitionniste. C'est ainsi que l'on rejoint naturellement la notion de preuve pour un intuitionniste, ce qui est en fait essentiellement une construction de la formule démontrée.

Pour illustrer cet aspect constructif, considérons le principe de dualité de la géométrie projective. Ce principe affirme que tout théorème de la géométrie projective qui parle de points et de droites peut être transformé en un nouveau théorème (dual) en remplaçant "droite" par "point" et "point" par "droite". Ce principe fournit de manière constructive de nouveaux théorèmes : il transforme effectivement toute preuve d'un théorème en une preuve de son dual. C'est un principe de théorie de la démonstration. C'est de cette manière qu'il faut comprendre chacun des schémas de déduction de Gentzen : ils transforment les preuves des formules situées au-dessus de la barre d'inférence en une preuve de la formule située en-dessous.

II. LE CALCUL DE DEDUCTION NATURELLE (Gentzen, 1934)(1)

Ce calcul constitue une des formalisations possibles de la notion de démonstration. Une démonstration sera représentée par une dérivation, c'est-à-dire un arbre construit à l'aide d'un certain nombre de règles d'inférence. Le qualificatif "naturel" provient de ce que ce calcul est lié de très près aux raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques.

Nous travaillerons toujours dans le langage $\mathcal{L}$ défini à l'aide des variables, des symboles fonctionnels et relationnels et des constantes logiques $\wedge, \vee, \rightarrow, \perp, \neg, \forall, \exists$. Les variables seront notées $x, y, \dots$; les termes $t, s, \dots$; les formules $\varphi, \psi, \dots$. Nous écrirons $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \neg \varphi, \varphi \rightarrow \psi, \exists x \varphi, \forall x \varphi$ pour désigner des formules dont le connecteur principal est respectivement $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \exists, \forall$.

Ce cadre étant fixé, nous définissons les différents schémas de déduction :

$$\wedge I \quad \frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$$

$$\wedge E \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

$$\vee I \quad \frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

$$\vee E \quad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ \chi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ \chi \end{array}}{\chi}$$

$$\rightarrow I \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \varphi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$$

$$\rightarrow E \quad \frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

$$\neg I \quad \frac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \perp \end{array}}{\neg \varphi}$$

$$\neg E \quad \frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp}$$

$$Int \quad \frac{\perp}{\varphi}$$

$$\forall I \quad \frac{\varphi(x)}{\forall x \varphi(x)} \quad (\text{voir rem 1})$$

$$\forall E \quad \frac{\forall x \varphi(x)}{\varphi(t)}$$

$$\exists I \quad \frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi(x)}$$

$$\exists E \quad \frac{\exists x \varphi(x) \quad \begin{array}{c} [\varphi(x)] \\ \psi \end{array}}{\psi} \quad (\text{voir rem 1})$$

Remarques

1. Les schémas $\forall I$ et $\exists E$ doivent vérifier la restriction suivante concernant la variable x (appelée paramètre propre du schéma) qui y apparaît.
 Pour $\forall I$, il faut que x n'apparaisse pas dans les hypothèses dont $\varphi(x)$ dépend. Dans ce cas il est clair qu'on peut en déduire $\forall x \varphi(x)$.
 Pour $\exists E$, il faut que x n'apparaisse ni dans ψ ni dans aucune hypothèse dont ψ dépend, sauf éventuellement $\varphi(x)$.
2. Chaque schéma doit être compris comme un procédé constructif pour transformer des dérivations des formules apparaissant au-dessus de la barre horizontale en une dérivation de la formule du dessous. Les crochets signifient qu'on décharge l'hypothèse en question. Ainsi, par exemple, le schéma $(\rightarrow I)$ se comprend comme suit : si j'ai une dérivation de la formule ψ à partir de φ et d'autres formules éventuellement, alors le schéma $(\rightarrow I)$ me fournit une dérivation de $\varphi \rightarrow \psi$ n'ayant plus φ parmi ses hypothèses.
3. Les schémas $(\neg I)$ et $(\neg E)$ peuvent être supprimés si on remplace $\neg \varphi$ par $\varphi \rightarrow \perp$.
4. Il peut être intéressant de numéroté les hypothèses comme nous le verrons dans les exemples qui suivent.
5. Une des particularités les plus remarquables du calcul de déduction naturel est que l'ensemble de ses schémas se divise en deux groupes : les schémas d'introduction (I) et les schémas d'élimination (E). Un seul schéma ne rentre pas dans cette classification, c'est le schéma Int (E falso sequitur quodlibet) nécessaire pour obtenir la logique intuitionniste.
 Il y a une correspondance étroite entre la signification constructive d'un connecteur logique et sa règle d'introduction (comme le montre la remarque 2 pour le $\rightarrow I$).

6. Pour obtenir la logique classique, il suffit d'ajouter la règle suivante

$$\neg C \frac{\frac{[\neg \varphi]}{\perp}}{\varphi} .$$

Exemples

Démontrons $\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)$.

a. Raisonnement intuitif :

Supposons qu'il existe un x tel que pour tout y , $\varphi(x,y)$ soit valide.

Soit a un tel x ; alors pour tout individu b , $\varphi(a,b)$ est valide.

Donc, il y a un x ($x = a$) tel que on ait $\varphi(x,b)$ et ceci est vrai pour n'importe quel b , donc pour tout y .

b. Formalisation

$$\begin{array}{c} \frac{\forall y \overset{1}{\varphi(x,y)}}{\varphi(x,y)} \\ \frac{\exists x \varphi(x,y)}{\exists x \forall y \varphi(x,y)} \quad \frac{\forall y \exists x \varphi(x,y)}{\forall y \exists x \varphi(x,y)} \quad -1 \\ \frac{\exists x \forall y \varphi(x,y)}{\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)} \quad -2 \end{array}$$

Cette dérivation est bien sans hypothèse, car les formules qui ont servi d'hypothèses au cours du raisonnement ont été déchargées.

III. EQUIVALENCE DU CALCUL DE DEDUCTION NATURELLE ET DE L'AXIOMATIQUE DE KLEENE POUR LA LOGIQUE INTUITIONNISTE.

Rappelons cette axiomatique :

- (1.1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (1.2) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (2.1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- (2.2) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
- (3.1) $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$
- (3.2) $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
 $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- (4.1) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi)$

$$(4.2) \quad \neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

Règle d'inférence : si φ et $\varphi \rightarrow \psi$, alors ψ .

$$(5.1) \quad \forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$$

$$(6.1) \quad \varphi(t) \rightarrow \exists x \varphi(x)$$

Règles d'inférence : (variables si x n'apparaît pas librement dans φ)

- si $\varphi \rightarrow \psi(x)$ alors $\varphi \rightarrow \forall x \psi(x)$

-- si $\psi(x) \rightarrow \varphi$ alors $\exists x \psi(x) \rightarrow \varphi$

Dans ce système, une démonstration est une suite de formules ne comprenant que des axiomes ou des formules obtenues à l'aide des règles d'inférence et des formules qui les précèdent.

Le but de ce paragraphe est de montrer que

Toute dérivation dans le calcul de déduction naturelle donne lieu à une démonstration dans l'axiomatique de Kleene, et vice versa.

3.a. Passage du système de Kleene aux déductions naturelles.

Pour démontrer ce point, il suffit de montrer que tous les axiomes de Kleene sont dérivables dans le calcul de déduction naturelle et que les règles d'inférence s'expriment à l'aide de schémas de déduction.

Procédons point par point.

(1.1) Voici une dérivation de $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$$\frac{\frac{\frac{1}{\varphi}}{\psi \rightarrow \varphi} (a)}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} - i$$

Le passage (a) s'est fait à l'aide de $(\rightarrow I)$ en déchargeant les occurrences de ψ dont φ dépend, i.e. en ne déchargeant rien.

$$(1.2) \quad \frac{\frac{\frac{1}{\varphi} \quad \frac{3}{\psi \rightarrow \psi}}{\psi} \quad \frac{\frac{1}{\varphi} \quad \frac{2}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}}{\psi \rightarrow \chi}}{\frac{\chi}{\varphi \rightarrow \chi} -1} -2$$

$$\frac{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))} -3$$

$$(2.1) \quad \frac{\frac{\frac{1}{\varphi} \quad \frac{2}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} -2}{\frac{\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))} -1}$$

(2.2) trivial.

(3.1)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \overset{1}{\cancel{\varphi}} \vee \psi & \overset{2}{\cancel{\varphi}} \overset{4}{\varphi \rightarrow \chi} & \overset{3}{\cancel{\psi}} \overset{5}{\psi \rightarrow \chi} \\
 \hline
 \chi & & \chi
 \end{array} & -2,3 \\
 \hline
 \chi & -1 \\
 \hline
 \varphi \vee \psi \rightarrow \chi & -5 \\
 \hline
 (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi) & -4 \\
 \hline
 (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))
 \end{array}$$

(3.2) trivial.

(4.1)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \overset{1}{\cancel{\varphi}} & \overset{3}{\varphi \rightarrow \psi} & \overset{1}{\cancel{\varphi}} \overset{2}{\varphi \rightarrow \neg \psi} \\
 \hline
 \psi & & \neg \psi
 \end{array} & \\
 \hline
 \perp & -1 \\
 \hline
 \neg \varphi & -2 \\
 \hline
 (\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi & -3 \\
 \hline
 (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \varphi)
 \end{array}$$

(4.2)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \overset{1}{\cancel{\varphi}} & & \overset{2}{\neg \varphi} \\
 \hline
 \perp & & \\
 \hline
 \psi & & \\
 \hline
 \varphi \rightarrow \psi & -1 \\
 \hline
 \neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & -2
 \end{array}
 \end{array}$$

La règle d'inférence pour le calcul propositionnel est le modus ponens qui correspond exactement à $(\rightarrow E)$.

(5.1) trivial.

(6.1) trivial.

Les règles d'inférence pour le calcul des prédicats correspondent respectivement à $(\forall I)$ et $(\exists E)$.

3.6. Passage des déductions naturelles à l'axiomatique de Kleene.

Décidons de noter $\Gamma \vdash \varphi$ toute dérivation de φ à partir de la collection de formules Γ et $\Gamma \vdash \varphi$ toute démonstration de φ dans l'axiomatique de Kleene à l'aide des axiomes, des règles d'inférence et des formules de la suite Γ .

Il s'agit de montrer que toute dérivation $\Gamma \vdash \varphi$ peut se transformer en une démonstration $\Gamma D \varphi$.

Nous allons prouver cela par induction sur la longueur de la dérivation $\Gamma \vdash \varphi$.

Par définition, la longueur d'une dérivation est le nombre de barres horizontales qu'elle contient.

- longueur 1 :

A $\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$ on fait correspondre $(\varphi, \psi, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)), \psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi), \varphi \wedge \psi)$.

Les cas $\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ et $\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$ sont triviaux, de même que $\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ et $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$.

A $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$ on fait correspondre $(\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \psi)$.

On voit bien que cela va se passer sans problème pour les dérivations de longueur 1.

- Il reste à utiliser l'hypothèse d'induction pour des règles comme (VE), (EI), ($\neg$ I), ($\exists$ E) car pour les autres, c'est trivial.

Analysons d'abord le cas du ($\rightarrow$ I) : métathéorème de la déduction.

$\frac{[\varphi] \quad \psi}{\varphi \rightarrow \psi}$: Par hypothèse d'induction, nous savons qu'à une dérivation $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ on associe une démonstration $\Gamma, \varphi D \psi$.

Il faut donc associer à la dérivation donnée une démonstration $\Gamma D (\varphi \rightarrow \psi)$.

Par hypothèse, nous avons une suite $\varphi_1 \dots \varphi_n$ de formules telles que $\varphi_n = \psi$ et pour tout i compris entre 1 et n , φ_i est soit un axiome, soit une formule de Γ , soit φ , soit une conséquence immédiate par les règles d'inférence de formules figurant parmi $\varphi_1 \dots$

φ_{i-1} .

Dans un premier temps, montrons que $\Gamma D (\varphi \rightarrow \varphi_1)$.

1. Si φ_1 est un axiome, on construit $(\varphi_1, \varphi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_1), \varphi \rightarrow \varphi_1)$
2. Si φ_1 est une formule de Γ , alors $(\Gamma, \varphi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_1), \varphi \rightarrow \varphi_1)$ est une démonstration.

3. Si $\varphi_i = \varphi$, c'est trivial.

4. φ_1 ne peut être une formule du quatrième type.

Montrons maintenant que si $\forall i, i < i_0$ on a $\Gamma D(\varphi \rightarrow \varphi_i)$ alors on aura aussi $\Gamma D(\varphi \rightarrow \varphi_{i_0})$, et cela achèvera la démonstration.

Le seul nouveau cas à envisager est le cas où φ_{i_0} est la conséquence d'une règle d'inférence.

1. φ_{i_0} est obtenue par modus ponens à partir de φ_{i_1} et $\varphi_{i_1} \rightarrow \varphi_{i_0} = \varphi_{i_2}$ ($i_1, i_2 < i_0$).

Par induction $\varphi \rightarrow \varphi_{i_1}$ et $\varphi \rightarrow \varphi_{i_2}$ sont démontrables à partir de Γ et donc grâce à l'axiome $(\varphi \rightarrow \varphi_{i_1}) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi_{i_2}) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi_{i_0}))$, $\varphi \rightarrow \varphi_{i_0}$ est aussi démontrable.

2. Si $\varphi_{i_0} = \varphi' \rightarrow \forall x \psi(x)$ obtenue à partir de $\varphi' \rightarrow \psi(x)$, on sait que $\varphi \rightarrow (\varphi' \rightarrow \psi(x))$ est démontrable à partir de Γ (c'est l'hypothèse d'induction qui nous l'affirme) de même évidemment que $\varphi' \rightarrow \psi(x)$. Mais alors $(\varphi' \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi' \rightarrow \forall x \psi(x))$ est démontrable grâce à l'axiome (1.1.) et le fait que $\varphi' \rightarrow \forall x \psi(x)$ est démontré.

Et donc, $\varphi \rightarrow ((\varphi' \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi' \rightarrow \forall x \psi(x)))$ est aussi démontrable grâce à (1.1) et ce qui précède. En appliquant (1.2), il vient que $\varphi \rightarrow (\varphi' \rightarrow \forall x \psi(x))$ est démontrable à partir de Γ .

3. Si φ_{i_0} est obtenue grâce à la règle d'inférence qui concerne le connecteur $\exists$, on procède comme en 2.

Analysons maintenant le cas $(\vee E)$.

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi] \quad [\psi] \\ \varphi \vee \psi \quad \chi \quad \chi \\ \hline \chi \end{array}}{\chi}$$

Par induction, nous avons deux démonstrations de χ :

$\Gamma, \varphi D\chi$ et $\Gamma, \psi D\chi$. Nous avons à en construire une

$\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi D\chi$.

Grâce au métathéorème de la déduction que nous venons de démontrer ci-dessus, nous avons donc $\Gamma D(\varphi \rightarrow \chi)$ et $\Delta D(\psi \rightarrow \chi)$.

Dès lors, à partir de Γ, Δ et $\varphi \vee \psi$, à l'aide de l'axiome (3.1), nous obtenons une démonstration de χ où φ et ψ n'apparaissent plus comme hypothèses.

Le cas de $(\exists E)$ est analogue, et le cas $(\neg I)$ se réduit à ce qui précède en remplaçant $\neg\varphi$ par $\varphi \rightarrow \perp$.

Ceci achève la démonstration.

IV. ENCORE QUELQUES EXEMPLES DE DERIVATION.

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad \frac{\frac{\frac{\neg \exists x^2 \varphi}{\perp} \quad \frac{\varphi(x)}{\exists x \varphi}}{\neg \varphi(x)} \quad -1}{\forall x \neg \varphi} \quad -2 \\
 \hline
 \neg \exists x \varphi \rightarrow \forall x \neg \varphi
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x \neg \varphi}{\neg \varphi(x)} \quad \varphi(x)}{\exists x \varphi} \quad \perp \quad -1}{\neg \exists x \varphi} \quad -2 \\
 \hline
 \forall x \neg \varphi \rightarrow \neg \exists x \varphi \quad -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c)} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x \varphi}{\varphi(x)} \quad \neg \varphi(x)}{\perp} \quad -1}{\neg \forall x \varphi} \quad -2 \\
 \hline
 \frac{\neg \neg \forall x \varphi}{\neg \neg \varphi} \quad -2 \\
 \hline
 \frac{\forall x \neg \neg \varphi}{\neg \neg \forall x \varphi \rightarrow \forall x \neg \neg \varphi} \quad -3
 \end{array}$$

d) $\varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow \psi$ pour toute formule ψ .

$$\begin{array}{r}
 \frac{\frac{\varphi \wedge \neg \varphi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \neg \varphi}{\neg \varphi}}{\perp} \\
 \hline
 \psi \\
 \hline
 \varphi \wedge \neg \varphi \rightarrow \psi \quad -1
 \end{array}$$

e) Enfin, un exemple de dérivation pour la logique classique, c'est-à-dire utilisant la règle $(\neg C)$.

$$\begin{array}{r}
 \frac{\frac{\neg \varphi}{\perp} \quad \neg \neg \varphi}{\varphi} \quad -1 \quad (\neg C) \\
 \hline
 \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi \quad -2
 \end{array}$$

Il est clair que dans l'autre sens ($\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$) la règle ($\neg I$) suffit.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 2 & 1 \\
 \varphi & \neg\varphi \\
 \hline
 \neg & \\
 \hline
 \neg\varphi & -1 \\
 \hline
 \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi & -2
 \end{array}
 \end{array}$$

V. PRINCIPE D'INVERSION ET THEOREME DE NORMALISATION

Nous avons déjà vu qu'à part la règle Int, tous les schémas de déduction se rangent en deux catégories : les introductions qui définissent en quelque sorte le connecteur et les éliminations. Introduction et élimination sont en un certain sens inverses l'une de l'autre. En effet, la conclusion d'une élimination n'apporte rien de neuf si la prémisse majeure de cette élimination était elle-même conclusion d'une introduction.

Ainsi, dans les deux exemples suivants, donnant une dérivation de la formule ψ , il y avait déjà une dérivation de ψ apparaissant plus haut.

$$\begin{array}{cc}
 \begin{array}{c}
 \varphi \quad \psi \\
 \hline
 \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 \psi
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 [\varphi] \\
 \psi \\
 \hline
 \varphi \rightarrow \psi \\
 \hline
 \psi
 \end{array}
 \end{array}$$

Ces deux dérivations contiennent donc ce qu'on peut appeler un détour puisqu'elles partent de dérivations de ψ pour aboutir encore à des dérivations de ψ . Le théorème de normalisation va nous permettre de court-circuiter tous ces détours. Mais cela nécessite une définition rigoureuse de "détour dans une dérivation". C'est la notion de segment maximum.

On appelle segment une suite $\varphi_1 \dots \varphi_n$ d'occurrences de la même formule telle que

- φ_1 n'est pas la conséquence d'une ($\vee E$) ou ($\exists E$).
- φ_i ($i < n$) est prémisse mineure d'une ($\vee E$) ou ($\exists E$) et
- φ_n n'est pas prémisse mineure d'une ($\vee E$) ou ($\exists E$).

Un segment maximum ($\varphi_1 \dots \varphi_n$) est un segment tel que φ_1 soit la conclusion d'une introduction et φ_n soit la prémisses majeure d'une règle d'élimination (i.e. φ_n contient le connecteur qui est éliminé).

Si $n = 1$, on parle de formule maximale.

Dans les deux exemples ci-dessus, $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \rightarrow \psi$ étaient respectivement des formules maximales.

Voici deux exemples de segments maximaux :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \varphi \vee \psi \\
 \hline
 \varphi \wedge (\varphi \vee \psi)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \chi \\
 \hline
 \varphi \vee \psi
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \chi \\
 \hline
 \varphi \vee \psi
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{-1,2}
 \begin{array}{c}
 \chi \wedge (\varphi \vee \psi) \\
 \hline
 \chi
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \psi \\
 \hline
 \psi \wedge \varphi(x)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \varphi(x) \\
 \hline
 \psi \wedge \varphi(x)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{-1}
 \begin{array}{c}
 \psi \wedge \varphi(x) \\
 \hline
 \psi \wedge \varphi(x)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \exists x \varphi(x) \\
 \hline
 \exists x (\psi \wedge \varphi(x))
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \psi \wedge \varphi(x) \\
 \hline
 \psi \wedge \varphi(x)
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{-2}
 \begin{array}{c}
 \exists x (\psi \wedge \varphi(x)) \\
 \hline
 \exists x \varphi(x)
 \end{array}$$

Nous allons définir une réduction sur les dérivations qui consiste à raccourcir la longueur des détours, c'est-à-dire des segments maximaux.

$$\wedge R : \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\varphi_1} \quad \frac{\Sigma_2}{\varphi_2}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}}{\varphi_i} \triangleright \frac{\Sigma_i}{\varphi_i} \quad i=1,2$$

$$\vee R : \frac{\frac{\frac{\Sigma}{\varphi_i \vee \varphi_2} \quad \frac{[\varphi_1]}{\Sigma_1}}{\psi} \quad \frac{[\varphi_2]}{\Sigma_2}}{\psi} \triangleright \frac{\frac{\Sigma}{[\varphi_i]}}{\psi} \quad i=1,2$$

$[\varphi_i]$ symbolise l'ensemble des hypothèses déchargées par (VE) et apparaissant dans Σ_i .

$$\rightarrow R : \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\varphi_1} \quad \frac{[\varphi_1]}{\Sigma_2}}{\varphi_2} \quad \frac{\Sigma_2}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}}{\varphi_2} \triangleright \frac{\frac{\Sigma_1}{[\varphi_1]}}{\varphi_2}$$

$[\varphi_1]$ symbolise l'ensemble des hypothèses de Σ_2 déchargées par ($\rightarrow E$).

$$\forall R: \frac{\frac{\frac{\Sigma(x)}{\varphi(x)}}{\forall x \varphi(x)}}{\varphi(t)} \triangleright \frac{\Sigma(t)}{\varphi(t)}$$

$$\exists R: \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\varphi(t)}}{\exists x \varphi(x)} \quad \frac{\frac{[\varphi(x)]}{\Sigma_2(x)}}{\psi}}{\psi} \triangleright \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{[\varphi(t)]}}{\Sigma_2(t)}}{\psi}$$

Les deux derniers schémas de réduction supposent la convention suivante sur les paramètres propres (voir 2, remarque 1) pour être corrects :

- une variable est paramètre propre d'au plus une règle d'inférence,
- le paramètre propre d'une ($\forall I$) intervient seulement au-dessus de la conclusion de l'inférence
- le paramètre propre d'une ($\exists E$) intervient uniquement au-dessus de la prémisse mineure de l'inférence.

Cette convention intervient tacitement dans les deux derniers schémas de réduction pour assurer qu'on ne perturbe pas d'éventuelles autres applications de ($\forall I$) ou ($\exists E$) en substituant t à x .

$$\forall E-R: \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\Sigma_2}{\chi} \quad \frac{\Sigma_3}{\chi}}{\chi} \quad \Sigma_4}{\chi'} \triangleright \frac{\frac{\frac{\Sigma_1}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\Sigma_2}{\chi} \quad \frac{\Sigma_3}{\chi}}{\chi'} \quad \Sigma_4}{\chi'}$$

Cette réduction est valable si, dans la dérivation de gauche, l'occurrence inférieure de χ est la dernière occurrence d'un segment maximum.

$$\exists E-R: \frac{\frac{\Sigma_1}{\exists x \varphi(x)} \quad \frac{\Sigma_2}{\chi}}{\psi \quad \chi} \Sigma_4 \quad \triangleright \quad \frac{\frac{\Sigma_1}{\exists x \varphi(x)} \quad \frac{\Sigma_2}{\psi} \quad \Sigma_4}{\chi}$$

Même remarque pour ψ que plus haut.

Le théorème de normalisation s'énonce alors comme suit :

Toute dérivation du calcul de déduction naturelle se réduit à une dérivation ne contenant ni formule maximale, ni segment maximum.

Une pareille dérivation est dite normale, or sous forme normale. On peut de plus montrer que la dérivation normale associée à une dérivation donnée est unique (théorème de normalisation forte). La démonstration de ce théorème se fait par induction à la fois sur la longueur des segments maximaux et la longueur des formules qu'ils contiennent.

Pour la démonstration, je vous renvoie au texte de Prawitz ((2) p. 50).

Voici un exemple de réduction à une forme normale :

Soient :

$$\frac{\frac{\varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)} \quad \varphi \quad \varphi}{\varphi} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad \frac{\varphi \wedge \chi}{\chi}}{\psi \vee \chi}}{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}$$

et

$$\frac{\frac{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)} \quad \frac{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}{\varphi} \quad \psi}{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}{\varphi} \quad \chi}{\varphi \wedge \chi} \quad \frac{\frac{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)} \quad \frac{\varphi \wedge \chi}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)}}{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)}$$

Remplaçons dans cette dernière dérivation toutes les occurrences de l'hypothèse $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ par sa dérivation, et voyons quelle est la forme normale qui correspond à cette dérivation nouvelle.

On obtient d'abord

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline \psi \quad \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline \psi \quad \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \\
 \hline \psi \vee \chi
 \end{array}$$

Ce qui par $\vee E-R$ donne :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array} \\
 \hline \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \end{array}
 \end{array}$$

Ce qui se réduit à la forme normale :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline \varphi \quad \varphi \\ \hline \varphi \wedge \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline \varphi \quad \varphi \\ \hline \varphi \wedge \psi \end{array} \\
 \hline \begin{array}{c} \varphi \wedge \psi \quad \varphi \wedge \chi \\ \hline \varphi \quad \varphi \\ \hline \varphi \wedge \psi \end{array}
 \end{array}$$

Voici un système qui n'admet pas de théorème de normalisation. Il est basé sur le système d'implication faible de Church, avec négation. Dans ce système, on accepte la règle $(\rightarrow I)$ ssi l'introduction de l'implication décharge effectivement une hypothèse. Ce système (avec $\rightarrow$ et $\neg = \rightarrow \perp$) admet la normalisation, mais l'axiome $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ n'y est pas démontrable. Si on ajoute le connecteur $\wedge$, le système perd la propriété de normalisation, mais l'axiome $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ y est démontrable par une dérivation qui ne peut se réduire à une forme normale.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 2 & 1 \\
 \varphi & \psi \\
 \hline
 \varphi \wedge \psi \\
 \hline
 \varphi
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \psi \rightarrow \varphi \\
 \hline
 \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -1 \\
 -2
 \end{array}
 \end{array}$$

Cette dérivation utilise la règle ($\rightarrow$ I) en déchargeant effectivement une hypothèse chaque fois.

La dérivation normale qui lui serait associée devrait être :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \varphi
 \end{array} (a) \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \psi \rightarrow \varphi \\
 \hline
 \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 -1 \\
 -2
 \end{array}
 \end{array}$$

mais l'inférence (a) (introduction de l'implication sans décharger d'hypothèse) est illicite dans ce système, et donc, n'est pas une dérivation du système.

VI. APPLICATION DU THEOREME DE NORMALISATION

(a) Forme des dérivations sous forme normale.

Définition : Une suite de formules $\varphi_1 \dots \varphi_n$ apparaissant dans une dérivation forme un chemin si

- φ_1 est une formule du sommet non déchargée par (VE) ou ($\exists$ E)
- pour $i < n$, φ_i n'est pas prémisses mineure d'une ($\rightarrow$ E) et si φ_i n'est pas prémisses majeure d'une (VE) ou ($\exists$ E), φ_{i+1} se trouve immédiatement sous φ_i , dans le cas contraire, φ_{i+1} est une des hypothèses déchargées par l'application de cette règle (VE) ou ($\exists$ E).
- φ_n est soit prémisses mineure d'une ($\rightarrow$ E) soit prémisses majeure d'une (VE) ou ($\exists$ E) ne déchargeant aucune hypothèse soit enfin la formule finale de la dérivation.

Exemple : Dans la dérivation

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \quad \frac{\varphi \wedge \chi}{\varphi}}{\varphi} \quad \frac{(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \frac{\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \quad \frac{\varphi \wedge \chi}{\chi}}{\psi \vee \chi}}{\varphi \wedge (\psi \vee \chi)}
 \end{array}$$

il y a quatre chemins :

$((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \wedge \psi, \varphi, \varphi, \varphi \wedge (\psi \vee \chi))$,
 $((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \wedge \chi, \varphi, \varphi, \varphi \wedge (\psi \vee \chi))$, $((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \wedge \psi, \psi, \psi \vee \chi, \varphi \wedge (\psi \vee \chi))$ et enfin $((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \varphi \wedge \chi, \chi, \psi \vee \chi, \varphi \wedge (\psi \vee \chi))$.

Comme on le voit facilement, un chemin peut être considéré comme une suite de segments. Ainsi dans l'exemple donné plus haut, chaque formule forme à elle seule un segment sauf les suites soulignées qui constituent chacune un segment.

D'ormais un chemin $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ sera noté $(\sigma_1 \dots \sigma_m)$ où les σ_i ($1 \leq i \leq m$) forment l'ensemble des segments qui constituent le chemin.

Théorème

Soit $(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ un chemin dans une dérivation normale.

Alors il existe un segment σ_i , appelé segment minimum qui sépare le chemin en deux parties éventuellement vides, et vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout σ_j ($i > j$) σ_j est la prémisse majeure d'une règle d'élimination et la formule qui apparaît dans σ_{j+1} est sous-formule de celle qui apparaît dans σ_j .
2. σ_i (si $i \neq n$) est la prémisse d'une règle d'introduction ou de la règle (Int).
3. Pour tout σ_j ($i < j < n$), σ_j est la prémisse d'une règle d'introduction et la formule qui apparaît dans σ_j est sous-formule de celle qui apparaît dans σ_{j+1} .

Ce théorème possède un corollaire important, le principe des sous-formules :

Toute formule qui apparaît dans une déduction normale est sous-formule de la formule finale ou d'une des hypothèses de la dérivation.

Ceci entraîne évidemment qu'aucune formule atomique n'est démontrable (i.e. dérivable sous hypothèse). En particulier, $\perp$ n'est pas démontrable, ce qui fournit une démonstration du fait déjà bien connu par ailleurs de la non-contradiction de la logique des prédicats intuitionniste .

En fait, ce résultat peut se généraliser de la manière suivante :

Un système de Post S est un système déterminé par la donnée

- d'un ensemble de constantes descriptives (individuelles, opérationnelles et prédicatives)
- d'un ensemble de règles d'inférences entre formules atomiques du type $\frac{\varphi_1 \dots \varphi_n}{\varphi}$ où φ ne contient pas de variables n'apparaissent pas dans un des φ_i au moins.

Dans un tel système un axiome est une formule atomique obtenue par une règle sans prémisse.

On appelle $I(S)$ le système de déduction naturelle dont le langage est celui décrit plus haut, augmenté des constantes du système S, et dont les schémas de déduction sont ceux de la logique intuitionniste plus les règles d'inférence de S.

Le théorème de normalisation, le principe des sous-formules se généralisent au système $I(S)$ (voir p.e.(3)).

Le principe des sous-formules donne lieu au corollaire suivant :
Si une formule atomique est démontrable dans $I(S)$, c'est qu'elle l'était déjà dans S.

Prenons donc le système de Post A suivant :

- les constantes descriptives sont 0, s, =, +, .. où 0 est une constante individuelle, s une constante opérationnelle unaire.

= une constante prédictive binaire et +, . deux constantes prédictives ternaires (l'interprétation de ces constantes dans le modèle canonique de l'arithmétique est évidente).

- les règles d'inférences sont celles habituelles pour l'égalité, les règles correspondant aux 3^e et 4^e axiomes de Péano, les règles induites par les définitions récursives de l'addition et de la multiplication, les règles donnant le caractère fonctionnel de + et .

Par exemple, le quatrième axiome de Péano donne

$$\frac{s(x) = s(y)}{x = y}$$

De nouveau chacune de ces règles est trivialement vérifiée dans le modèle canonique de l'arithmétique.

Dans l'arithmétique de Péano, on peut démontrer la normalisation de $I(A)$, car comme nous l'avons remarqué, la démonstration du théorème de normalisation utilise une simple induction.

Et donc on peut démontrer dans l'arithmétique de Péano, la consistance de $I(A)$.

D'une manière générale, la normalisation d'un système implique sa consistance.

- (b) Si Γ est une suite de formules ne contenant pas le connecteur $\vee$ et si $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$,
alors, soit $\Gamma \vdash \varphi$ soit $\Gamma \vdash \psi$.

Donc, en logique intuitionniste, pour pouvoir démontrer $\varphi \vee \psi$, il faut démontrer φ ou ψ .

Idée de la démonstration :

On appelle segment final un segment qui contient la formule finale de la dérivation.

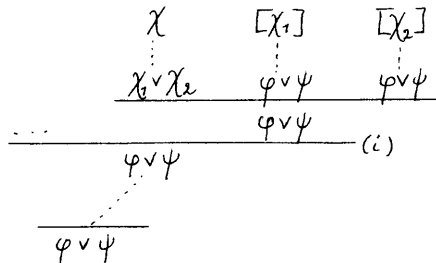
Considérons une dérivation Π normale de $\varphi \vee \psi$ à partir de Γ .

Nous procédons en deux étapes :

1. Il y a exactement un seul segment final σ dans Π .

En effet, s'il y en avait deux, ils proviendraient automatiquement d'une règle (VE) dont ils contiendraient chacun une des prémisses

mineures. Soit $\chi_1 \vee \chi_2$ la prémisse majeure de cette règle (VE). Soient π le chemin qui contient $\chi_1 \vee \chi_2$, et χ la formule située au sommet de π . Il est clair que χ n'est pas déchargée : en effet par construction χ ne peut être déchargée par (VE) ou ($\exists E$) (c'est la définition de chemin que nous l'assure) et de plus χ ne peut être déchargée par ($\rightarrow I$) car il n'y a pas de pareille règle utilisée en-dessous de $\chi_1 \vee \chi_2$. En effet, π se présente en fait sous la forme suivante



avec sous la ligne (i) des ($\exists E$). Donc χ appartient à Γ .

Comme de plus $\chi_1 \vee \chi_2$ se trouve dans la partie éliminatoire de π (voir théorème 6.a) le principe des sous-formules affirme que $\chi_1 \vee \chi_2$ est sous-formule de χ et donc que Γ contient une formule χ dans laquelle apparaît le connecteur de disjonction.

C'est contraire à l'hypothèse et il y a bien un seul segment final.

2. Trois possibilités s'ouvrent maintenant pour σ :

- σ est segment minimum : on montre alors que cela implique que $\varphi \vee \psi$ soit sous-formule d'une formule de Γ , ce qui est impossible;
- σ est conséquence d'une règle Int, auquel cas on remplace cette règle $\frac{\perp}{\varphi \vee \psi}$ par $\frac{\perp}{\varphi \vee \psi}$ ou par $\frac{\perp}{\varphi \vee \psi}$
- σ est conséquence d'une règle (VI).

On voit aisément que les deux derniers cas fournissent des démonstrations de φ ou de ψ à partir de Γ , en remplaçant par exemple toutes les occurrences de $\varphi \vee \psi$ dans σ par φ ou ψ selon les cas.

Conséquences

- Le contreexemple de Gödel.

La formule $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (p_i \leftrightarrow p_j)$ n'est pas valide intuitionnistiquement. Car si elle l'était, elle serait démontrable (voir 3), et donc par ce qui précède on pourrait démontrer $p_i \leftrightarrow p_j$ pour $i \neq j$, ce qui est clairement impossible (cela implique par exemple $\perp \leftrightarrow \top$).

- Si φ est atomique, $\varphi \vee \neg \varphi$ est non démontrable.

En effet, sinon on en déduit une démonstration de φ (ce qui est impossible (6.a) ou une de $\neg \varphi$, ce qui est également impossible en vertu du principe des sous-formules.

(c) Indépendance des constantes logiques en logique intuitionniste

- c1. Un connecteur ou un quantificateur $*$ est faiblement définissable dans un système S s'il existe une transformation ε qui transforme toute formule φ en une formule $\varepsilon(\varphi)$ ne contenant pas $*$ et qui vérifie - $\varepsilon(\varphi)$ s'obtient en remplaçant dans φ toutes les sous-formules du type $\chi * \psi$ ou $* \chi \psi$ par $\varepsilon(\chi * \psi)$ ou $\varepsilon(* \chi \psi)$ (en supposant que $*$ n'apparaît ni dans ψ ni dans χ)
- $\vdash_S \varepsilon(\varphi)$ ssi $\vdash_S \varphi$.

- c2. Des constantes logiques sont fortement indépendantes dans le système S si elles ne sont pas faiblement définissables dans S.

On démontre le théorème suivant :

Toutes les constantes logiques sont fortement indépendantes dans la logique intuitionniste.

A titre exemplatif, nous allons démontrer l'indépendance du $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ et $\perp$. On procède par l'absurde : on suppose que ε est une transformation vérifiant c1 pour chaque constante.

1. Indépendance du $\vee$.

Soient P et Q deux symboles relationnels 0-aires, $\varphi = P \vee Q$ et soit R un symbole relationnel 0-aire n'apparaissant pas dans $\mathcal{E}(\varphi) = \psi$.

On sait que $\vdash (P \vee Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R)$

et donc $\psi \vdash (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$

En substituant $P \vee Q$ à R , on obtient $\psi \vdash P \vee Q$.

Par le point (b) ci-dessus, on en conclut $\psi \vdash P$ ou $\psi \vdash Q$.

Mais comme $P \vdash P \vee Q$ et $Q \vdash P \vee Q$, on a les séquents

$P \vdash \psi$ et $Q \vdash \psi$. Ceci amène à conclure $P \vdash Q$ ou $Q \vdash P$, ce qui est clairement impossible en vertu du principe des sous-formules.

2. Indépendance du $\rightarrow$.

Ceci est immédiat car une formule qui ne contient pas $\rightarrow$ n'est pas démontrable.

En effet soit une dérivation $\overline{\Pi}$ de la formule φ .

Considérons un chemin contenant l'occurrence finale de φ dans la dérivation $\overline{\Pi}$. Comme $\overline{\Pi}$ est une preuve (i.e. il n'y a pas d'hypothèses), ce chemin commence par une occurrence de formule déchargée. Comme un chemin ne peut commencer par une occurrence de formule déchargée par $\vee E$ ou $\exists E$, c'est donc une $\rightarrow I$ qui décharge la formule du sommet. Par le théorème (a), la formule φ doit donc contenir l'implication introduite de cette manière.

3. Indépendance du $\forall$.

Soient P un symbole relationnel 1-aire, $\varphi = \mathcal{E}(\forall x P(x))$; et y une variable n'apparaissant pas dans φ .

Comme $\vdash \forall x P(x) \rightarrow P(y)$, on a aussi $\vdash \varphi \rightarrow P(y)$, et donc $\varphi \vdash \forall x P(x)$

En admettant le lemme suivant (sa démonstration se trouve dans (2) p. 61)

Si φ ne contient pas de connecteur $\forall$,

Alors $\varphi \vdash \forall x P(x)$ implique $\varphi \vdash \perp$.

L'indépendance se montre facilement.

En effet, il est clair que $\forall x P(x) \rightarrow \perp$ est non démontrable.

Or par définition de faible définissabilité, l'équivalence

$\vdash \forall x P(x) \rightarrow \perp$ ssi $\vdash \mathcal{E}(\forall x P(x) \rightarrow \perp)$ est vraie.

Or le second séquent n'est autre que $\vdash \varphi \rightarrow \perp$ qui est valide par le lemme. Nous débouchons donc sur la contradiction attendue.

4. Indépendance de $\perp$.

Soit $\varphi = \mathcal{E}(\perp)$ et supposons que $\perp$ puisse être remplacé par φ sans changer la démontrabilité.

Si P est un symbole relationnel n -aire n'apparaissant pas dans φ , puisque $\vdash \perp \rightarrow P$ on a aussi $\vdash \mathcal{E}(\perp \rightarrow P)$ et donc $\vdash \varphi \rightarrow P$ ou encore $\varphi \vdash P$;

Ceci implique par le principe des sous-formules que P est est sous-formule de φ ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque

Certains des résultats ci-dessus ont déjà été démontrés dans un précédent exposé par des méthodes topologiques. Il faut remarquer que les résultats d'indépendance que nous venons d'établir sont plus généraux puisque valables non seulement dans la logique des propositions intuitionnistes mais aussi dans la logique des prédicats.