LES THESES DE LA LOGIQUE INTUITIONNISTE

Th. LUCAS

Bibliographie :

[1] KLEENE S.C. "Introduction to Metamathematics"
North-Holland, Amsterdam, London, 1971.

[2] MYHILL J. "Embedding Classical Logic in Intuitionistic Logic"
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. 19, pp.93-96 (1973).

Deux parties dans cet exposé donneront des indications sur l'ensemble des thèses de la logique intuitionniste. La première reprend le système formel (de type hilbertien) de Kleene; des tableaux indiqueront certaines implications démontrables dans ce système; une implication non retournée n'est pas démontrable en général dans le système. La deuxième montre en quel sens des transformations du type "double négation" permettent de plonger la logique classique dans la logique intuitionniste : elle est basée sur [1] pp. 492 ss et [2].

I. Quelques thèses de la logique intuitionniste.

Voici le système décrit par Kleene.

a) Pour le calcul des propositions :

$P \to (Q \to P)$

$(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$

$$\frac{P, \quad P \to Q}{Q}$$

$P \to (Q \to P \wedge Q)$

$P \wedge Q \to P$

$P \wedge Q \to Q$

$P \to P \vee Q$

$Q \to P \vee Q$

$(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R))$

$(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$

$(\neg P \to (P \to Q))$

b) Pour le calcul des prédicats : a) et :

$$\frac{Q \to P(x)}{Q \to \forall x\, P(x)}$$

$\forall x\, P(x) \to P(t)$

$$\frac{P(x) \to Q}{\exists x\, P(x) \to Q}$$

$P(t) \to \exists x\, P(x)$

avec les restrictions classiques sur x et t.

c) Pour l'arithmétique: a), b) et :

$P(o) \wedge \forall x\, (P(x) \to P(x')) \to P(x)$

$x' = y' \to x = y$

$\neg x' = o$

$x = y \to (x = z \to y = z)$

$x = y \to x' = y'$

$x + o = x$

$x + y' = (x+y)'$

$x.o = o$

$x.y' = x.y + x$

Les systèmes classiques correspondants s'obtiennent par l'adjonction du schéma :

$$\neg\neg P \to P$$

A noter que ceci affecte directement le caractère intuitionniste de la négation mais aussi celui du quantificateur universel, car ajouter

$$\neg\neg P(x) \to P(x)$$

revient à ajouter

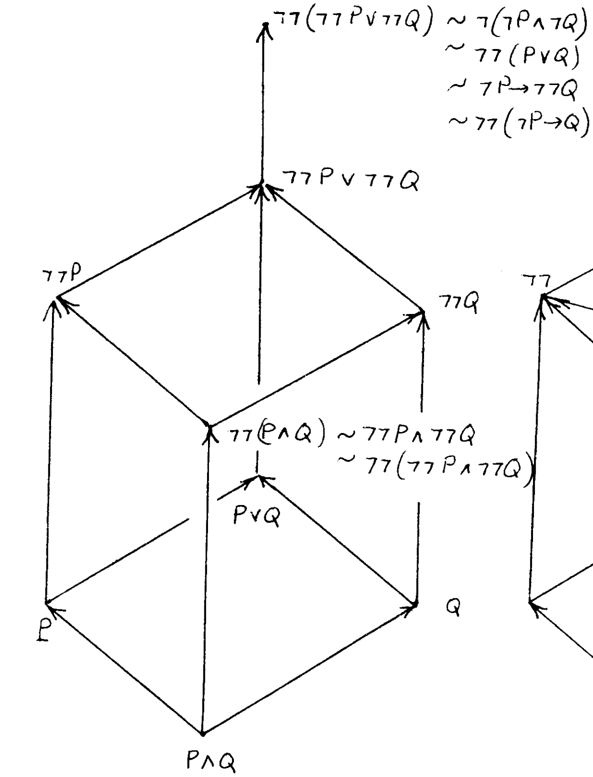
$$\forall x(\neg\neg P(x) \to P(x)),$$

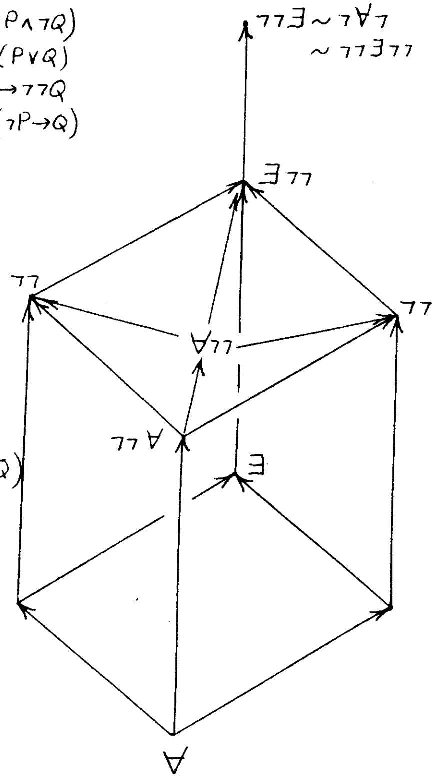
d'où l'on déduira

$$\forall x \neg\neg P(x) \to \forall x\, P(x),$$

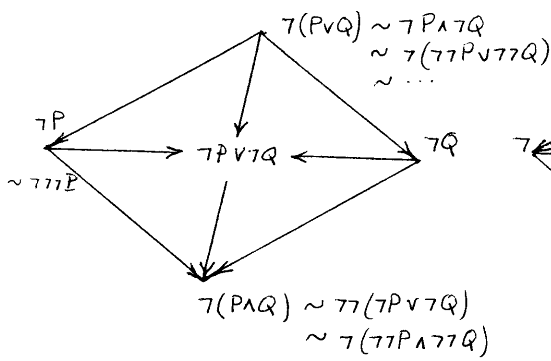
écrasant ainsi les différences que l'intuitionnisme met entre $\forall\neg\neg$, $\neg\neg\forall$ et $\forall$.

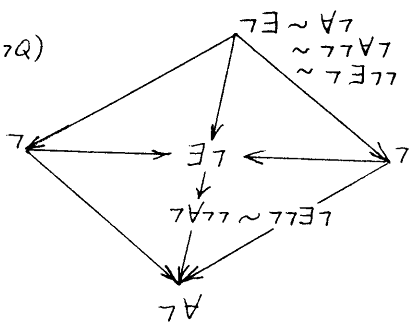
Voici quelques tableaux qui éclairent surtout le comportement de la négation. Pour d'autres théorèmes, voir [1].





on





, ¬¬∀

4.-

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & P \to \neg\neg Q \sim \neg\neg(P\to Q) \sim \neg\neg P \to \neg\neg Q \sim \neg(P \wedge \neg Q) \sim \neg(\neg\neg P \wedge \neg Q) & \\
 & P \to Q \arrow[u] & \\
 & \neg\neg P \to Q \arrow[u] & \\
 & \neg P \vee Q \arrow[u] & \\
\neg P \arrow[ur] & & Q \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \neg(P\to Q) \sim \neg(\neg P \vee Q) \sim \neg(P \to \neg\neg Q) \sim \neg\neg P \wedge \neg Q \sim \dots \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg\neg P & & \neg Q
\end{tikzcd}$$

II. Plongements des systèmes classiques dans les systèmes intuitionnistes correspondants.

Le prototype de ces plongements est la transformation de double négation : si P est un théorème du calcul propositionnel classique, $\neg\neg P$ est un théorème du calcul propositionnel intuitionniste. Plus généralement, on associe à chaque formule P une formule P^* (que nous appellerons ci-dessous sa "traduction") et on essaie de prouver des résultats du type :

(A) $\Gamma \vdash_{pc} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{pi} P^*$
(B) $\Gamma \vdash_{c} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{i} P^*$
(C) $\Gamma \vdash_{ac} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{ai} P^*$

où Γ^* est l'ensemble des traductions des formules de Γ et $\vdash_{pc}$, $\vdash_{pi}$, $\vdash_{c}$, $\vdash_{i}$, $\vdash_{ac}$, $\vdash_{ai}$ sont respectivement les relations de conséquence du calcul des propositions classique, du calcul des propositions intuitionniste, du calcul des prédicats classique, du calcul des prédicats intuitionniste, de l'arithmétique classique, de l'arithmétique intuitionniste.

Les deux lemmes techniques qui suivent permettent de simplifier les vérifications nécessaires pour établir la plupart des propriétés des traductions que nous envisagerons.

Lemme 1. Soient une traduction $*$ et un ensemble Δ de formules satisfaisant les conditions suivantes pour toutes formules P et Q et pour toute variable x :

(1) $\Delta \vdash_{i} \neg\neg P^* \rightarrow P^*$ pour P atomique
(2) $\Delta \vdash_{i} (\neg P)^* \leftrightarrow \neg P^*$
(3) $\Delta \vdash_{i} (P \wedge Q)^* \leftrightarrow P^* \wedge Q^*$
(4) $\Delta \vdash_{i} (P \vee Q)^* \leftrightarrow \neg(\neg P^* \wedge \neg Q^*)$
(5) $\Delta \vdash_{i} \neg\neg Q^* \rightarrow Q^*$ entraîne $\Delta \vdash_{i} \neg\neg(P \rightarrow Q)^* \rightarrow (P \rightarrow Q)^*$
(6) $\Delta \vdash_{i} (\exists x P)^* \leftrightarrow \neg \forall x \neg P^*$
(7) $\Delta \vdash_{i} \neg\neg P^* \rightarrow P^*$ entraîne $\neg\neg(\forall x P)^* \rightarrow (\forall x P)^*$.

Alors, pour toutes formules P,

$\Delta \vdash_{i} \neg\neg P^* \rightarrow P^*$.

<u>Démonstration</u>. On démontre " $\Delta \vdash_i \neg\neg P^* \rightarrow P^*$" par induction sur la forme de P

(1) donne l'étape atomique.

Si P est de la forme $\neg Q$, $Q \vee R$ ou $\exists x Q$, le résultat s'obtient sans hypothèse d'induction à partir de (2), (4) ou (6).

Si P est de la forme $Q \rightarrow R$ ou $\forall x\, Q$, on applique (5) ou (7).

Finalement, si P est de la forme $Q \wedge R$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \vdash_i \neg\neg(Q \wedge R)^* &\leftrightarrow \neg\neg(Q^* \wedge R^*) && \text{par (3),} \\ &\leftrightarrow \neg\neg Q^* \wedge \neg\neg R^*, && \\ &\leftrightarrow Q^* \wedge R^* && \text{par l'hypothèse d'induction,} \\ &\leftrightarrow (Q \wedge R)^* && \text{par (3).} \end{aligned}$$

<u>Lemme 2</u>. Soient une traduction * et un ensemble Δ satisfaisant les conditions du lemme (1) et de plus, pour tous P, Q, x, t

(8) $\Delta \vdash_i \neg\neg(P \rightarrow Q)^* \leftrightarrow (\neg\neg P^* \rightarrow \neg\neg Q^*)$

(9) $\Delta \vdash_i \exists x \neg Q^* \rightarrow \neg(\forall x Q)^*$

(10) si x n'a pas d'occurences libres dans P, alors x n'a pas d'occurences libres dans P^*

(11) si t est libre pour x dans P, alors t est libre pour x dans P^*.

Alors, pour tout ensemble Γ de formules, $\Gamma \vdash_c P$ entraîne $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

<u>Démonstration</u>. Par induction sur la démonstration (classique) de P à partir de Γ .

Si $P \in \Gamma$, alors $P^* \in \Gamma^*$ et de là $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

Si P est un axiome classique, on prouve que $\Delta \vdash_i P^*$; il en résulte que $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

Nous envisageons ci-dessous la plupart des cas, laissant la vérification des autres au lecteur.

Si P est de la forme $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$, on a :

$$\begin{aligned} &\vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow (\neg\neg R^* \rightarrow \neg\neg Q^*), && \\ \Delta &\vdash_i \neg\neg(Q \rightarrow (R \rightarrow Q))^* && \text{par (8),} \\ \Delta &\vdash_i (Q \rightarrow (R \rightarrow Q))^* && \text{par le lemme 1.} \end{aligned}$$

Si P est de la forme $Q \to (R \to Q \wedge R)$, on a :

$$\vdash_i \neg\neg Q^* \to (\neg\neg R^* \to \neg\neg(Q^* \wedge R^*)),$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \to (\neg\neg R^* \to \neg\neg(Q \wedge R)^*) \quad \text{par } (3),$$

et on achève par (8) et le lemme 1 comme ci-dessus.

Si P est de la forme $Q \to (Q \vee R)$, on a :

$$\vdash_i \neg\neg Q^* \to \neg\neg\neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*),$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \to \neg\neg(Q \vee R)^* \quad \text{par } (4),$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Le cas de l'axiome classique $\neg\neg Q \to Q$ n'offre pas de difficultés particulières, car (2) entraîne :

$$\Delta \vdash_i (\neg\neg Q)^* \leftrightarrow \neg\neg Q^*.$$

Si P est de la forme $Qt \to \exists x Qx$ (avec t libre pour x dans Q), on a :

$$\vdash_i \forall x \neg Qx^* \to \neg Qt^* \quad \text{par } (11),$$

$$\vdash_i \neg\neg Qt^* \to \neg\neg\neg \forall x \neg Qx^*,$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Qt^* \to \neg\neg (\exists xQx)^*$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Si P est de la forme $\forall xQx \to Qt$ (avec t libre pour x dans Q), on a :

$$\Delta \vdash_i \exists x \neg Qx^* \to \neg(\forall xQx)^* \quad \text{par } (9),$$

$$\vdash_i \neg Qt^* \to \exists x \neg Qx^* \quad \text{par } (11),$$

$$\Delta \vdash_i \neg Qt^* \to \neg(\forall xQx)^*,$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg(\forall xQx)^* \to \neg\neg Qt^*,$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Il nous reste à envisager les cas où P est obtenu par les règles de dérivation.

Si P est obtenu par la règle d'introduction du quantificateur existentiel, l'hypothèse d'induction est du type

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i (Qx \to R)^*,$$

d'où l'on tire :

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg(Qx \to R)^*,$$

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Qx^* \to \neg\neg R^* \quad \text{par } (8),$$

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg R^* \to \neg Qx^*,$$

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg R^* \rightarrow \forall x \neg Qx^*$ par (10),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg\neg \forall x \neg Qx^* \rightarrow \neg\neg R^*$,

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg(\exists x Qx)^* \rightarrow \neg\neg R^*$ par (6),

et l'on achève par (8) et le lemme 1.

Le cas où P est obtenu par la règle de modus ponens se traite de façon plus simple encore, en appliquant (8) et le lemme 1. Finalement, si P est obtenu par la règle d'introduction du quantificateur universel, l'hypothèse d'induction est du type :

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i (Q \rightarrow Rx)^*$,

d'où l'on tire :

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg (Q \rightarrow Rx)^*$,

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \neg\neg Rx^*$ par (8),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow Rx^*$ par le lemme 1,

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \forall x Rx^*$ par (10),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \neg\neg \forall x Rx^*$,

et on achève par (8) et le lemme 1.

Voici quelques exemples de "traduction".

<u>EXEMPLE 1</u>. La traduction* définie pour tout P par $P^* \equiv \neg\neg P'$, où P' est définie inductivement selon la forme de P par les clauses :

$P' \equiv P$ pour P atomique,

$(\neg Q)' \equiv \neg Q'$,

$(Q \wedge R)' = Q' \wedge R'$,

$(Q \vee R)' = Q' \vee R'$,

$(Q \rightarrow R)' = Q' \rightarrow R'$,

$(\exists x\, Q)' = \exists x Q'$,

$(\forall x Q)' = \neg \exists x \neg Q'$.

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \emptyset$.

On en déduira immédiatement le résultat (B). Le résultat (A) vaut aussi si l'on considère le calcul propositionnel comme un cas dégénéré de calcul des prédicats (où l'ensemble des variables est vide) ; on retrouve ici le théorème de la double négation :

$$\Gamma \vdash_{pc} P \quad \rightarrow \quad \neg\neg\Gamma \vdash_{pi} \neg\neg P$$

(car dans ce cas $P' = P$).

Un corollaire de ce genre de résultats est l'équiconsistance des calculs de propositions (ou des calculs de prédicats) classique et intuitionniste ; en effet, si $P \wedge \neg P$ était une théorème classique, $(P \wedge \neg P)^*$, à savoir $\neg\neg(P' \wedge \neg P')$ en serait un du système intuitionniste correspondant.

On en déduit aussi que pour P sans autres connecteurs que $\wedge$ et $\neg$,

$$\vdash_{pc} P \rightarrow \vdash_{pi} P .$$

EXEMPLE 2. La traduction P^* définie inductivement selon la forme de P par les clauses :

$$\begin{aligned}
P^* &= P \text{ pour } P \text{ atomique}\\
(\neg Q)^* &= \neg Q^*\\
(Q \wedge R)^* &= Q^* \wedge R^*\\
(Q \vee R)^* &= \neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*)\\
(Q \rightarrow R)^* &= Q^* \rightarrow R^*\\
(\exists x Q)^* &= \neg \forall x \neg Q^*\\
(\forall x Q)^* &= \forall x Q^*
\end{aligned}$$

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \{\neg\neg Q \rightarrow Q \mid Q \text{ atomique}\}$.

On en déduit que pour tout Γ , $\Gamma \vdash_c P \rightarrow \Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$ (12).

On peut établir le résultat (C) par l'argument suivant, Ar désignant l'ensemble des axiomes de l'arthmétique :

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_{ac} P &\rightarrow \Gamma \cup Ar \vdash_c P\\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar^* \cup \Delta \vdash_i P^* \text{ par (12)}\\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar \cup \Delta \vdash_i P^* \text{ (car } Ar \vdash_i Ar^*)\\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar \vdash_i P^* \text{ (car } Ar \vdash_i \Delta \text{)}\\
&\rightarrow \Gamma^* \vdash_{ai} P^*.
\end{aligned}$$

Ce résultat entraîne l'équiconsistance de l'arithmétique classique et de l'arithmétique intuitionniste.

EXEMPLE 3. La traduction P^* définie par les mêmes clauses que celles de l'exemple 2 sauf

$$(Q \rightarrow R)^* = \neg(Q^* \wedge \neg R^*).$$

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \{\neg\neg Q \rightarrow Q \mid Q \text{ atomique}\}$. On établit le résultat (C), comme ci-dessus. On a aussi le résultat (A) pour $\Gamma = \emptyset$, en utilisant la dernière remarque de l'exemple 1.

EXEMPLE 4. La traduction $P^{*\neg\neg}$ obtenue à partir de la traduction P^* de l'exemple 2 en remplaçant dans P^* chaque formule atomique par sa double négation.

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \emptyset$. On établit les résultats (A), (B) et (C) pour tout Γ.

Cet exemple admet plusieurs variantes.

EXEMPLE 5. La traduction P^* définie inductivement par les clauses :

$P^* = P$ pour P atomique

$(\neg Q)^* = \neg Q^*$

$(Q \wedge R)^* = Q^* \wedge R^*$

$(Q \vee R)^* = \neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*)$

$(Q \rightarrow R)^* = \neg(Q^* \wedge \neg R^*)$

$(\exists xQ)^* = \neg \forall x \neg Q^*$

$(\forall xQ)^* = \neg \exists x \neg Q^*$.

Cette traduction vérifie toutes les clauses des lemmes pour $\Delta = \emptyset$, sauf (1), On modifie la conclusion du lemme (1) en :

$$\vdash_c P \quad \rightarrow \quad \vdash_i \neg\neg P^* \rightarrow P^*$$

et sa démonstration en prouvant cette assertion par induction sur la forme de P. De même on modifie la conclusion du lemme 2 en :

$$\vdash_c P \quad \longrightarrow \quad \vdash_i P^*$$

et la démonstration subsiste moyennant quelques adaptations évidentes.

Pour une discussion des avantages de cette traduction, voir [2].