

REMARQUES SUR LA PHILOSOPHIE DE BROUWER

Richard Leonard

Dans un livre récent, Michaël Dummett insiste avec force sur l'importance que revêt à ses yeux la philosophie intuitionniste des mathématiques. Il affirme très raisonnablement que la pratique mathématique de l'intuitionnisme est étroitement liée à une philosophie des mathématiques qui la motive. Moins raisonnablement, il oppose d'une manière abstraite et simplifiée la philosophie intuitionniste à deux autres grands courants de la philosophie des mathématiques - celles dérivant des travaux de Frege et de Hilbert - en vue d'établir sa suprématie totale. D'après Dummett, étant donné les échecs de construction d'un système logique englobant les mathématiques et d'une preuve finitiste de cohérence, la philosophie intuitionniste est "le seul système unifié de l'ancienne époque, quand plusieurs philosophies mathématiques rivales étaient en conflit, qui a survécu intact..." (Dummett, EI, p. 1). Encore moins raisonnablement cette vaste affirmation, qui déforme l'idée même d'une philosophie des mathématiques en la liant trop rigide-ment à la réalisation d'un projet mathématique précis, semble pousser Dummett à lier malencontreusement la valeur des mathématiques intuitionnistes à la victoire de la philosophie intuitionniste sur les autres philosophies rivales. "Si jamais il (l'intuitionnisme) perd cette bataille, la pratique même des mathématiques intuitionnistes et l'étude métamathématique des systèmes intuitionnistes toutes les deux, deviendront une perte de temps" (Dummett, EI, p. viii). Voilà qui est étonnant : l'apport constructiviste en mathématique dû aux mathématiciens et logiciens intuitionnistes devrait alors être rejeté si jamais une philosophie réaliste des mathématiques s'avérait plus juste que celle des intuitionnistes. Mais est-ce que l'on n'a pas à faire ici à une vue de l'esprit ? Il existe des affirmations qui en surface, pour ainsi dire, sont vraies, mais en profondeur sont fausses. Elles annoncent une vérité partielle qui trompe puisqu'elle ne dit pas assez. Il en va ainsi des affirmations de Dummett telles celles-ci : "... les mathématiques intuitionnistes sont vaines en dehors de la motivation philosophique qui

les sous-tend... Les mathématiques intuitionnistes ne peuvent être justifiées par leur seul intérêt mathématique "(Dummett, EI, p. viii).

Au contraire, on peut penser que l'intérêt principal de l'intuitionnisme est en quelque sorte mathématique. Je dis en quelque sorte car il est évident qu'il y a un rapport organique entre la philosophie des mathématiques et la pratique mathématique. Mais ce rapport n'est ni forcément assumé consciemment par les mathématiciens, ni transparent. La philosophie intuitionniste des mathématiques n'est pas constituée en un système parfaitement défini et statique. Elle est composée d'un nombre d'éléments fondamentaux plus ou moins harmonieusement intégrés en un tout. Dès lors il faut examiner le rapport entre la pratique mathématique et chacun des éléments, et non pas d'un tout mal défini et indifférencié, d'une philosophie évolutive. On ne peut pas supposer sans démonstration que la pratique mathématique intuitionniste dérive d'une manière également substantielle de chaque élément qui ait pu se présenter à un moment ou l'autre. Il se peut que les éléments factices s'accroissent à d'autres éléments réels et qu'il faille faire la part des choses. Mais qu'est-ce exactement que la philosophie intuitionniste dont il est ici question ? Cela se discute sans doute, mais ce qui est indiscutable c'est que le fondateur de cette philosophie (et sa pratique mathématique) est L.E.J. Brouwer. C'est avant tout sa philosophie qu'il faut voir, et quand on parle d'un système unifié de l'époque de grandes écoles de la philosophie des mathématiques, c'est de son système que l'on parle.

Les prémisses

En 1905 à l'âge de 24 ans Brouwer rédigea un texte intitulé "Life, Art And Mysticism", qui éclaire bien les prémisses de sa philosophie. A l'origine l'être humain vivait isolé, insouciant d'autrui et du monde qui s'opposaient tous les deux à lui. Intervient la chute ; les contacts avec les autres ; la tristesse et la misère. Il faut alors, dit Brouwer, opérer un retour au Soi, seule protection possible contre "ce triste monde" que le Soi "libre et illuminé" reconnaît, du reste, comme étant "une réalité

qui n'est plus complètement distincte du Soi, mais dirigée au dedans du Soi et avec le Soi" (LAM, p. 2). Le retour au Soi offre le grand avantage de tout maîtriser, car il s'agit après tout de soi-même. "Ayant contemplé la tristesse de ce monde, regarde en toi-même. En toi il y a conscience... le contenu de ta conscience... est en grande partie déterminé par tes humeurs et celles-ci sont en ton pouvoir" (LAM, p. 1s).

La chute de l'être humain fut causée par l'Intellect. L'Intellect et sa production, le savoir rationnel, nous jouent le mauvais tour de nous distancer de nous-mêmes. "Dans la science tout ce qui est perçu est placé en dehors du Soi, dans un monde de perception indépendant du Soi ; le lien avec le Soi, sa seule source et guide, est rompu". Ensuite elle construit un substratum mathématico-logique qui est complètement étranger à la vie, une illusion, qui agit dans la vie comme une tour de Babel avec sa confusion de langues" (LAM, p. 7). Langage et logique, véhicules du savoir rationnel, ne méritent pas notre confiance. La communication par langage est impossible, la logique ne peut nous servir de guide. N'ayant de réalité que par rapport à la vie et l'activité du Soi, coupés de celui-ci ils deviennent rigides et inadéquats : "Le langage en soi n'a pas de signification ... La logique est la vie du cerveau humain ; elle peut accompagner la vie en dehors de celui-ci, elle ne peut jamais servir de guide en vertu de ses seuls pouvoirs" (LAM, p. 6).

Il ne faut pas avoir d'illusion, nous dit Brouwer, sur les possibilités de changer le monde vers un mieux. La science ou d'autres formes de savoir plus ou moins rationnels comme l'art et la religion peuvent nous renseigner sur ce que Brouwer appelle la Vérité Immanente, à savoir, l'impasse dans laquelle le triste monde se trouve : "... la bêtise et l'injustice sont essentielles à la société humaine; en effet, si la société humaine était meilleure, était gouvernée par l'amour et la fraternité, il n'y aurait pas de raison à son existence, elle n'existerait simplement pas ...

Ceux qui sont libres voient leur prochain comme une hallucination... Non, le monde ne peut être transformé de manière à apporter le bien à l'homme" (LAM, p. 9). La Vérité Immanente, accessible par le savoir rationnel, peut ouvrir nos yeux à la possibilité d'une Vérité plus élevée mais elle ne peut nous libérer des "châfnes irreligieuses (sinful) de la science, de la foi dans la réalité et de la pensée logique" (LAM, p. 5).

Non, il n'y a qu'une solution, c'est de quitter le monde et d'opérer le repli en Soi. Une vérité plus élevée que la Vérité Immanente peut nous faire entrevoir notre salut. Il s'agit de la Vérité Transcendante qui est définie comme "l'Auto-réflexion éternellement émanant et se résorbant" (LAM, p. 8). La Vérité Transcendante nous place au plan de la sagesse qui efface la distance entre le Soi et le non-Soi et qui procure la Vie Libérée. La sagesse est au-delà de la science et de la logique. Elle seule est religieuse, tout le reste, y compris la religion (entendez la théologie spéculative), est irreligieuse (sinful).

Dans ces réflexions sur la vie, l'art et le mysticisme, on voit se dessiner plus ou moins clairement les trois traits fondamentaux de la philosophie intuitionniste fondée par Brouwer : 1) l'idéalisme subjectif du type solipsiste, 2) le reductionnisme positiviste et 3) le constructivisme. Le monde en dehors de mon ego est méchant et agressif; il m'échappe. Le Soi est une forteresse isolée et cela vaut mieux car il contrôle alors tout. Dès lors il importe de réduire à moi ce qui est en dehors de moi, le monde, l'autrui, le langage, la logique, la science. Le Soi-forteresse ne dépend de et n'est responsable devant personne. La société est injuste ; mes semblables sont des hallucinations. Tout, monde matériel et autrui, doit être ramené à moi. Ce que je construis en moi, je le contrôle immédiatement et totalement ; il est absolument sûr. Ce qui va au-delà de mes constructions ne l'est plus. "Les manifestations du Soi dans les limites et formes particulières de cette vie sont des irrupsions de la Vérité" (LAM, p. 7). Moi je crée, je contrôle ; le reste n'a plus aucune prise sur moi.

Philosophie générale

Si maintenant on demande à quoi cela peut servir de se donner beaucoup de mal pour développer le savoir rationnel, comme l'a fait Brouwer pour les mathématiques, la réponse n'est pas claire. Pourquoi ne pas se consacrer uniquement à la sagesse si "la pensée scientifique" n'est rien d'autre qu'une fixation de la volonté à l'intérieur des limites de la tête humaine, une vérité scientifique (n'est) rien d'autre qu'un engouement, un désir limité à l'esprit humain" (LAM, p. 4). Peut-être en partie parce que si l'on est condamné à passer par ce triste monde autant vaut faire ce qui nous rapproche le plus de la Vérité Transcendante et de la Vie Libérée. Sans doute, Brouwer, ne voyait-il pas la pratique de la Vérité Immanente comme une propédeutique nécessaire à l'étape suprême. Peut-être aussi partiellement parce que, en bonne logique Schopenhauerienne, l'Intellect étant néfaste, le Soi est conçu comme Volonté. En mathématiques du moins, discipline à laquelle Brouwer se consacra, la Volonté crée librement par des constructions mentales le savoir rationnel qui est ainsi dominé par la Volonté. Il est possible qu'aux yeux de Brouwer, c'est donc cette domination de la Volonté qui rend les mathématiques dignes, avant toute autre activité consciente, de notre attention. En tout cas il place les mathématiques au centre de toute pensée comme l'unique source du savoir a priori et donc libéré du poids déformant du monde pragmatique.

Dans son texte de 1905 Brouwer avait écrit : "A présent tu reconnâtras ta Libre Volonté, dans la mesure où elle est libre de se retirer du monde de la causalité et de rester ensuite libre, obtenant seulement alors une Direction définie qu'elle suivra librement et d'une manière réversible (LAM, p. 2). Plus tard dans une conférence donnée en 1928 il insistera sur le rôle primordial que joue "la Volonté à la Vie" dans le développement de la Conscience (MWS, p. 417). Dans ce texte il semble indiquer la dépendance de toute activité rationnelle de la Volonté, car il en fait dépendre les "principales fonctions de l'activité des

hommes", à savoir, les mathématiques, la science, et le langage. Selon lui ces trois activités principales des hommes dérivent de trois formes opérationnelles de cette Volonté : l'attention mathématique, l'abstraction mathématique et l'imposition de la volonté par la parole. On le voit, l'activité humaine est conçue comme essentiellement consciente et subjuguée à la Volonté. La philosophie idéaliste de Brouwer est axée sur le Soi conscient, dont l'attribut principal semble être la Volonté, et son développement.

Dans une communication de 1948 Brouwer donna une présentation globale de sa philosophie générale. Cette communication, intitulée "Consciousness, Philosophy and Mathematics", explique l'ontogénèse de la Conscience qui, d'après Brouwer consiste en trois phases ou niveaux de développement : la phase naïve, la phase causale et la phase sociale. Cette évolution ontologique mène la Conscience de sa "demeure la plus profonde" (deepest home), et pourrait-on dire la plus isolée, au "monde extérieur" de coopération et d'entendement mutuel entre "nous". On doit cependant noter qu'à peine Brouwer a-t-il annoncé ce voyage de la Conscience que, fidèle à son attitude solipsistique, l'irréalité du terme de ce voyage est rappelée : "Cette explication (des phases de la Conscience) n'implique pas un entendement mutuel et pourrait d'un certain point de vue rester un monologue" (CPM, p. 480).

Avant que ne s'enclenche le processus du développement, la Conscience, confortablement logée dans sa demeure profonde, est dans un état tranquille de passivité en dehors de toute attitude d'attention. Elle "semble osciller lentement, sans volonté et d'une manière réversible entre immobilité et sensation" (ibid). Il semble que cet état de grâce et de tranquillité isolée est la seule attitude vraiment religieuse.

La Conscience quitte son sein ontologique en adoptant une attitude d'attention vis-à-vis des sensations qui lui viennent.

Dans le monde-rêve du départ surgit un monde pragmatique, pour employer une terminologie utilisée ailleurs par Brouwer (DF), au moyen d'un phénomène de discernement. Ce phénomène initial est temporel, car il s'agit de la fixation de l'attention sur une sensation qui passe et qui cède la place à une autre de telle manière que la première est retenue par la Conscience comme passée. C'est grâce à un tel "déplacement du temps" (move of time) que la Conscience devient esprit, que la phase naïve est engagée. Du coup l'"égocité", c'est-à-dire, la nature subjective de l'objet est perdue, et ce dernier devient étranger à moi et je peux dès lors le désirer ou l'appréhender. Ce phénomène de discernement peut aussi être un phénomène de "deux-ité" (two-ity) réitérable à volonté qui est à la base de la pensée mathématique et par conséquent de toute pensée scientifique. La réitération conduit à l'idée de nombre, si elle ne tient aucun compte qualitatif des sensations, et sinon à l'idée de séquence ou complexe temporel de sensations, c'est-à-dire, des séquences causales et les objets.

La phase causale est le fait de l'attention causale qui s'exerce sur les séquences dégagées de la "pluralité hétéroclite" des sensations. On identifie une séquence des sensations avec une autre faite de sensations semblables et dans même ordre temporel ; ce sont des complexes itératifs de sensations. "Un complexe itératif de sensations, dont les éléments ont un ordre invariable de succession dans le temps, tandis que si un de ses éléments se produit, tout les éléments subséquents sont censés se produire également dans le bon ordre, est appelé une séquence causale" (ibid). Des objets, au sens normal du mot, sont réduit en fait aux complexes de sensations causées par ces objets. Plus précisément les objets sont des séquences causales qui ont la propriété suivante : l'ordre temporel de sensations est permutable. Parmi les objets composant le monde extérieur du sujet il y a mon corps et les autres corps semblables, à savoir, des individus.

C'est par le biais de l'attention causale que nous intervenons dans le monde extérieur. Mon attention étant fixée sur une séquence causale, il se peut que je désire un élément qui ne

m'est pas conativement disponible dans l'immédiat; alors j'effectue la production d'un élément antérieur dans la séquence qui m'est conativement disponible, et qui sera suivi plus tard par l'élément désiré. Cela s'appelle l'acte rusé (cunning act), et grâce à lui je crée "une sphère causale d'influence que d'un côté... (je) protège par une activité destructive de choses qui menacent des séquences causales utiles, et de l'autre côté...(j')étends par une activité de construction de choses capables de nouvelles séquences causales utiles" (CPM, p. 481).

Il est évident que dans ma sphère causale d'influence se trouvent des individus et que par conséquent j'agis conativement sur eux. Dès lors s'installe une sorte de coopération entre individus, et la Conscience passe à la phase sociale où les principales activités sont le langage et la science. La Conscience passe d'actes causals individuels aux systèmes de pensée causals qui sous-tendent les actes coopératifs causals. En premier lieu il s'agit de pensée scientifique qui "d'une manière économe et efficace, catalogue les vastes groupes de séquences causales coopératives" (CPM, p. 482). La pensée scientifique est avant tout basée sur les mathématiques qui sont essentiellement une manière de généraliser et universaliser librement dans l'abstrait des groupes de séquences causales observées et donc forcément très limitées. Il y a donc savoir, mais c'est un savoir solitaire et en fait incommunicable. Car s'il y a une phase sociale de la Conscience et du langage, cela se manifeste uniquement au niveau de l'interaction de différentes activités conatives des individus : une rencontre plus ou moins harmonieuse des volontés brutes. L'organisation coopérative d'une groupe d'individus consiste en un "treillis métallique de transmission de volontés" (wire-netting of will-transmission) (*ibid*). Brouwer ne reconnaît pas l'existence d'une pluralité de sujets. Il n'y a pas d'autres Consciences, il n'y a pas non plus échange de pensée. "En dehors de l'âme, tout exposé sur le sens et l'essence de la vie est un monologue, et toute discussion sur l'esprit pluralifié (pluralified) est un jeu de dialectique dans l'arène de l'hypothèse collective d'un super-sujet collectif apercevant un monde objectif qui existe indépendamment des soi-disant sujets humains..." (CPM, p. 485).

Ayant esquissé le développement de la Conscience, Brouwer se demande "si et où, pendant et après cet exode de la Conscience, la beauté, l'entendement mutuel, la sagesse et la vérité peuvent être trouvés" (CPM, p. 483). Nous avons déjà vu suffisamment pour savoir qu'il n'y a pas beaucoup d'espoir dans ces domaines. L'entendement mutuel est exclu, la vérité est éclatée, et la sagesse se trouve au bout d'un chemin difficile de retraite en Soi. "Dans la pensée et l'action causales la beauté ne peut guère être trouvée"(ibid), même si un aspect ludique peut s'y immiscer et nous libérer momentanément du désir et de la crainte. Plus important, il y a "la beauté constructionnelle". Ce n'est que dans les mathématiques qu'elle fleurit abondamment... l'intuition de base des mathématiques est laissée à un libre épanouissement...(oui) n'est pas enchaîné au monde extérieur, et par là à la finitude et à la responsabilité; par conséquent ses harmonies introspectives peuvent atteindre n'importe quel degré de richesse et de clarté"(CPM, p. 484).

La philosophie de Brouwer ne recèle rien de profondément original. Elle est basée, comme tout bon idéalisme subjectif, sur une conception empiriste de la perception qui remonte à Locke et à Berkeley. Le sujet percevant est assailli d'une foule désordonnée et désunie de sensations, une "pluralité hétéroclite" comme disait Brouwer, à partir de laquelle il faut construire la réalité. Les parties disparates de ce monde perceptuel sont immédiatement données au sujet et par conséquent libres d'incertitude. Il les rassemble pour créer un monde tout en se résignant à quelques contraintes mal définies. Car, bien que cela soit peu clair, la Conscience, la Volonté, échappe partiellement au sujet. Le monde est triste et méchant. Il faut "détruire" certains éléments des séquences causales; il faut lutter pour survivre. Le sujet ne peut se libérer complètement de toute dépendance et de toute responsabilité dans ce triste monde qu'en s'isolant solipsistiquement dans ses propres constructions : "... il se peut que la sagesse nous invite à nous tendre patiemment vers notre libération réversible de la participation dans le commerce coopératif et des rapports présupposant une pluralité d'esprit"(CPM,

p. 487). La science est purement pragmatique; elle est basée sur une conception Huméenne de la causalité ; elle n'explique pas, elle prédit. Comme dit Heyting elle est "une arme dans la lutte pour la vie" (Heyting , B, p. 310). Le langage sert principalement aux monologues. Seules les mathématiques et dans un moindre degré, la logique échappent quelque peu au miasme du monde pragmatique. Elles ont l'aspect des jeux poursuivis en dehors de la crainte, la contrainte, le désir et la vocation. Elle nous ramène vers la demeure profonde de la Conscience et par là nous rapprochent de la sagesse. La science est une arme dans la lutte pour la vie; les mathématiques sont un refuge menant au salut.

Philosophie des mathématiques

En 1905, nous l'avons vu, Brouwer publia un texte dans lequel apparaissent les prémisses de sa philosophie générale. En 1907, il publia sa thèse doctorale sur les fondements des mathématiques dans laquelle apparaît la première formulation de sa philosophie des mathématiques. Je voudrais d'abord attirer l'attention sur le premier chapitre, intitulé "The Construction of Mathematics". Dans ce chapitre, Brouwer esquisse la construction des entiers, des nombres négatifs, des rationnels des irrationnels et la géométrie à partir des "intuitions de base" pour arriver à une conclusion intitulée "Mathematics can deal with no other matter than that which it has itself constructed" (FM, p. 51). Voici comment Brouwer conclut sa (re)construction des mathématiques : "Dans les pages précédentes on a montré comment les parties fondamentales des mathématiques peuvent être construites à partir des unités de perception par la simple juxtaposition, la construction des séquences du type ω , ou η , ou en construisant des continus, tandis qu'à chaque étape du processus des systèmes complets déjà construits peuvent être employés comme des nouvelles unités. Dans le troisième chapitre, il sera expliqué pourquoi aucune mathématique ne peut exister qui n'a pas été construite intuitivement de cette manière; pourquoi par conséquent la seule fondation possible des mathématiques doit être recherchée dans une telle construction sous obligation d'observer attentivement quelles constructions sont admises par l'intuition et quelles ne le sont pas; et pourquoi toute autre tentative de fondement est vouée à l'échec" (FM, p. 51 s).

L'essentiel de la philosophie intuitionniste est là. Un objet mathématique n'existe que dans la mesure où l'on l'a construit; on ne peut par conséquent l'obtenir par l'absurde ou d'autres méthodes purement logiques. On part de l'absolument certain : mes perceptions intuitives immédiates et transparentes. Chaque étape est soumise à la surveillance, immédiate et transparente elle aussi, de mon intuition. Je contrôle directement, intuitivement tout. Comme l'a dit Heyting "... une conscience scientifique tranquille suffit..." (1, p. 6). Les bonnes mathématiques sont fondées en les faisant correctement. Car oui, il y a des mauvaises mathématiques, à savoir, celles où s'éloignant de l'intuition on se laisse guider à travers le vide intellectuel par des principes logiques relatifs pour arriver à une des contradictions mathématiques bien connues. On ne peut rien trouver de plus fondamental à la pensée scientifique que les mathématiques. Plus ou moins explicitement les écrits de Brouwer font dériver tout, et très explicitement la logique, des mathématiques. On ne peut les fonder sur autre chose; elles fondent tout.

Ce noyau de la philosophie intuitionniste laisse ouvert bien entendu, beaucoup de questions importantes. Etant très schématique l'on ne sait pas encore quelles perceptions de base peuvent être acceptées ni exactement quels principes de constructions sont admissibles. Pour voir avec plus de précision les principes intuitionnistes de Brouwer regardons un écrit tardif, "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", publié en 1952.

Au départ les mathématiques étaient observationnelles. On s'efforçait d'observer les propriétés du temps et de l'espace, supposées immuables et indépendantes du langage et de la perception, en érigeant en axiomes les propriétés perçues comme absolument invariables. De ces axiomes on déduisait d'autres propriétés en faisant des raisonnements "... guidés par la perception mais en suivant et en employant linguistiquement les principes de la logique classique" (HBM, p. 508). Cette période observationnelle a duré jusqu'au 19^e siècle, quand due à la découverte des géométries non-euclidiennes, l'étude de l'espace perdait sa place à côté de celle du temps pour

devenir une mathématique appliquée. Le succès que rencontrait à ce moment-là la méthode logico-linguistique en développant des systèmes géométriques non-observationnels amenait à des tentatives de lier étroitement logique et mathématiques en dehors de toute expérience ou perception mathématique. Il s'agit de systèmes formellement axiomatisés développés par des gens comme Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Frege, Russell et Zermelo. Parallèlement certains mathématiciens pré-intuitionnistes (Poincaré, Borel, Lebesgue) cherchaient à maintenir "une attitude observationnelle modifiée" (HBPM, p. 509). Ils n'auraient pas cherché à fonder intuitivement le continu, mais l'auraient fait dépendre de la logique et du langage.

Cela étant d'après Brouwer l'évolution des mathématiques, l'intuitionnisme intervient pour clarifier et pour résoudre les problèmes inhérents aux mathématiques à ce stade de leur développement. Les mathématiques sont allées trop loin dans leur dépendance de la logique et du langage; elles ont outrepassé les limites de l'expérience intuitive. Deux actes de la Conscience intuitionniste vont remettre les choses en place. Le premier acte de l'intuitionnisme "sépare complètement les mathématiques du langage mathématique, et en particulier des phénomènes du langage décrits par la logique théorique, et reconnaît que les mathématiques intuitionnistes sont une activité de l'esprit essentiellement alinguistique ayant son origine dans la perception d'un déplacement du temps, c'est-à-dire, la désagrégation d'un moment vécu en deux choses distinctes, l'une cédant la place à l'autre mais tout en étant retenue par la mémoire. Si l'on dépouille cette deux-ité de toute qualité, il restera la forme vide du substratum commune à toute deux-ité. C'est ce substratum commun cette forme vide, qui est l'intuition de base des mathématiques" (HBPM, p. 509s).

Nous avons ici les pierres fondamentales de l'édifice mathématique; on voudrait tout construire avec elles. Du concept de deux-ité nous passons directement aux concepts d'entité, d'encore-une-fois et d'ainsi-de-suite. Cela nous suffit pour ce que Brouwer appelle "un déroulement sans limite", c'est-à-dire, l'engendrement par réitération d'une séquence dénombrablement infinie du type d'ordre ω .

Les nombres naturels, l'arithmétique, nous sont donnés plus ou moins directement par l'intuition. Les mathématiciens classiques pensent en termes d'axiomes et de déductions logiques, les intuitionnistes en termes d'intuition, d'évidence et d'inspection introspective des propriétés dont sont dotées les nombres. Pour les intuitionnistes le principe d'induction n'est pas un axiome mais une propriété constructive des naturels. Rien n'est plus certain, immédiat et contrôlable que l'arithmétique. Quand il faut aller au-delà du fini nous introduisons une loi s'appuyant sur le caractère inductif des naturels, pour engendrer des séquences infinies. Cette légalité nous procure une certitude aussi absolue que dans le cas de constructions finies.

On conclut donc que ce premier acte d'intuitionnisme suffit pour la base des mathématiques : "une fois en possession des méthodes fondamentales de l'induction et de la récursion, nous ne rencontrons aucune difficulté sérieuse dans l'arithmétique des nombres naturels, pas plus d'ailleurs, que dans celle des entiers ou même des rationnels" (Heyting, I, p. 14). Mais le véritable problème posé par le développement historique des mathématiques, surtout aux 18^e et 19^e siècles, c'est le passage de "la nature discrète, qualitative et individuelle du nombre dans le domaine 'combinatorial' du dénombrement (arithmétique)" à "la nature continue, quantitative et homogène des points de l'espace (ou du temps) dans le domaine 'analytique' de la mesure (géométrie)" (Fraenkel and Bar-Hillel, FST, p. 212).

Dans la thèse de 1907 Brouwer, comme les soi-disant pré-intuitionnistes qu'il critiqua plus tard, accepte le continu comme intuitionnistement valable : "... le continu en tant qu'un tout nous était donné par l'intuition; une construction pour lui, une action qui créerait à partir de l'intuition mathématique (de base) 'tous' ses points en tant qu'individus, est inconcevable et impossible. L'intuition mathématique (de base) est incapable de créer autre chose que des ensembles dénombrables d'individus. Mais elle est capable, après avoir créé une échelle du type d'ordre η , de superposer sur celle-ci un continu en tant qu'un tout, qui ultérieurement peut être inversement

considéré comme un continu mesurable, et qui est la matrice des points sur l'échelle" (FM, p. 45). Brouwer semble avoir délaissé assez vite cette conception "pré-intuitionniste"; car très vite tout concept de l'infini comme un tout actuel, complété, étendu ou existentiel est mis au ban. Ce genre de conception essentielle aux théories de Cantor est remplacé par une conception purement intuitionniste de l'infini comme étant potentiel, en devenir ou constructif. Il ne peut être question de manipuler, par exemple, la totalité des naturels comme une entité close sur pied d'égalité avec ses membres pris individuellement.

Donc, il ne peut être question d'accepter un axiome de complétude; cela revient à abandonner l'attitude constructiviste. Mais, il ne peut être non plus question d'une théorie comme disons celle de la théorie ramifiée des types qui rejette toute quantification portant sur plus d'un sous-ensemble dénombrable des réels à la fois. Car... un système toujours inachevé et toujours dénombrable de "nombres réels" est incapable de remplir les fonctions mathématiques du continu, pour la raison simple qu'il ne peut jamais avoir une mesure positivement différente de zéro" (HBPM, p. 509). Ni non-constructive, ni trop constructive; ce qu'il fallait c'est une possibilité de quantification portant sur toutes les séquences de naturels ou sur toutes les séquences satisfaisant une certaine condition.

C'est le second acte de l'intuitionisme qui nous place sur la voie d'une théorie mathématique de l'infini qui est juste. C'est un acte "...qui reconnaît la possibilité de la génération d'entités mathématiques nouvelles : d'abord dans la forme de séquences procédant infiniment $p_1, p_2, \dots$, dont les termes sont choisis plus ou moins librement parmi les entités mathématiques préalablement acquises de telle sorte que la liberté de choix qui joue éventuellement pour le premier élément p_1 pourrait être sujette à une restriction durable à partir d'un p_r ultérieur, et encore à des restrictions durables plus contraignantes ou même l'abolition à d'autres p_r ultérieurs, tandis que l'on peut faire dépendre toutes ces interventions restrictives, ainsi que les choix des p_r eux-mêmes, des expé-

riences futures possibles du sujet créateur; deuxièmement dans la forme d'espèces mathématiques, c'est-à-dire, des propriétés attribuables aux entités mathématiques préalablement acquises, et satisfaisant la condition que si elles s'appliquent à une certaine entité mathématique, elles s'appliquent également à toute entité mathématique définie comme égale à celle-ci : les relations d'égalité devant être symétriques, réflexives et transitives; les entités mathématiques préalablement acquises auxquelles la propriété s'applique sont appelées les éléments de l'espèce" (HBPM, p.511). Cet acte crée la possibilité de construction du continu intuitionniste comme l'espèce des séquences convergentes infinies de rationnels procédant plus ou moins librement. Et Brouwer croit tenir là, avec ce qu'apporte le premier acte, la totalité des bonnes mathématiques.

On notera sans surprise que le constructivisme de Brouwer est bien ancré dans sa philosophie idéaliste. C'est dans la phase sociale du développement de la Conscience que naissent les mathématiques en vertu de l'intuition pure (i.e. toute considération qualitative des sensations mise à part) du temps : "Le phénomène de base... est l'intuition simple du temps, dans laquelle la répétition est possible dans la forme "chose dans le temps et encore chose"... (FM, p. 53). Comme pour Kant, pour Brouwer les propositions mathématiques sont des propositions a priori synthétiques dérivées des constructions de l'intuition. Mais à la différence de Kant, Brouwer restreint l'a priori aux intuitions temporelles puisque, d'après lui, seul est a priori ce qui est à la fois commun à toutes les mathématiques et suffisant pour construire toutes les mathématiques. Or il y a plusieurs géométries, mais une seule science des nombres qui peut servir à tout construire. Donc, "Le seul élément a priori en science est le temps" (FM, p. 61).

Mais qui parle de l'intuition temporelle parle d'une activité de la Conscience. Les objets mathématiques ne sont dès lors pas des objets séparés de la Conscience et indépendants d'elle qui doivent être découverts. Comme l'a dit Heyting, "Ce qui caractérise la pensée mathématique c'est qu'elle n'apporte pas de vérité sur le monde extérieur, mais s'occupe seulement des constructions mentales" (I, p. 8s).

Où encore : "Toute affirmation mathématique peut être exprimée dans la forme : 'J'ai effectué la construction A dans mon esprit'" (Heyting, I, p. 19). Les objets mathématiques se trouvent dans la Conscience et, pour Brouwer au moins, nulle part ailleurs. Car comme on l'a vu Brouwer adopte une philosophie solipsiste de telle sorte que le sujet créateur mathématicien se suffit à lui-même.

Le solipsisme est une attitude philosophique cohérente, et donc possible, qu'accepte qui veut. Cependant il faut dire que peu de monde l'accepte. D'autre part, étant donné son extrême invraisemblance, pour ne pas dire plus, on pourrait estimer réfutée par l'absurde une philosophie qui mène jusque là. Mais comme on sait une théorie, qui est presque toujours faite de plusieurs principes, n'est pas forcément réfutée in toto par l'échec d'un de ses principes. Laissons donc le côté spécifiquement solipsiste de la philosophie idéaliste de Brouwer pour regarder le côté subjectif.

L'idéalisme subjectif de Brouwer veut que le mathématicien construise dans son esprit les objets mathématiques. Mais que devient alors la valeur intersubjective des mathématiques qui semble tout de même irrécusable ? Si je construis dans mon esprit un objet mathématique dont je découvre certaines propriétés, est-ce que l'objet et ses propriétés n'auraient pas existé avant, est-ce qu'ils n'existeraient plus quand je n'y pense plus, est-ce que l'on peut les comparer avec d'autres objets et propriétés, dans mon esprit dans l'esprit d'un autre mathématicien ? Questions qui sont embarrassantes, du moins pour ceux qui entendent maintenir une attitude de bon sens. Toute forme de l'idéalisme subjectif vire vers le solipsisme - le sujet étant limité à ses perceptions, ses intuitions, qu'est-ce qui pourrait lui procurer un monde objectif - à moins d'un coup de force. En fait on voit que ceux qui pratiquent les mathématiques intuitionnistes taisent simplement ces problèmes ou essaient d'atténuer tant bien que mal les conséquences inacceptables de l'idéalisme subjectif. Par exemple, Heyting après avoir affirmé la nature subjective de l'activité mathématique est amené à dire qu'il faut "... reviser quelque peu notre concept d'un nombre naturel" (I, p. 15). Il semble suggérer qu'une sorte de permanence peut être associée à nos constructions mentales en les fixant, disons, sur papier (ibid). Acceptera-t-il cette solution boiteuse.

Les écrits de Heyting illustrent bien un autre problème dérivant de l'idéalisme subjectif de la philosophie de Brouwer. Dans ce genre de philosophie on est acculé à s'appuyer sur "l'évidence" pour juger de la valeur d'une proposition mathématique. Or l'évidence est un critère notoirement variable d'une personne à l'autre en plus d'être souvent traître. Heyting dit qu'une conscience scientifique tranquille suffit pour accepter une proposition. Mais ce qui est évident pour toi ne l'est peut-être pas pour vous et vice versa. Frege considérait comme évident l'axiome naïf de compréhension avant que l'on démontre l'existence d'une contradiction découlant de ses axiomes. D'autre part on constate que les intuitionnistes diffèrent d'avis sur des sujets pourtant substantiels. Les uns acceptent des constructions qui emploient la négation les autres pas, les uns acceptent le théorème de l'éventail les autres pas. Brouwer lui-même, comme l'on a vu, avait à un moment donné accepté l'idée du continu comme intuitivement valable pour la rejeter par la suite. Sa conscience scientifique n'était-elle pas tranquille ? Heyting a été amené à distinguer pas moins de sept degrés différents d'évidence (B, p. 316). Y aurait-il donc des consciences scientifiques plus ou moins tranquilles ? Manifestement pour ceux qui veulent discuter, sur des bases indépendantes des particularités des individus, de la valeur des propositions mathématiques le recours à la seule "évidence" subjective est exclu.

Ce n'est pas une pure coïncidence que ces objections au subjectivisme de la philosophie intuitionniste de Brouwer semblent être reprises ailleurs. Elles ont été appliquées à une autre forme de subjectivisme réductif, à savoir, le positivisme. Celle-là faisait appel à l'évidente certitude de nos sensations aussi. Comme remarque Heyting : "Ses sensations (celles de Brouwer) correspondent aux 'Protokol-Isätze' des positivistes... Comme les positivistes, Brouwer accepte comme principe méthodologique la nécessité de partir de ce qui est directement observé et immédiatement clair, et il trace la frontière de ce matériel de base au même endroit qu'eux" (B, p. 312). Rien d'étonnant alors de voir, par exemple, Heyting dépeindre comme de la métaphysique, entendez mystification, tout appel à une réalité objective en dehors des constructions mentales du sujet (I, p. 1-12). Rien d'étonnant non plus de voir Dummett, tout comme Locke et Hume, remplacer signification et référence par la manière que nous avons apprise et que nous comprenons, ou de le voir s'étonner que l'on

puisse supposer que notre savoir transcende ce que nous avons pu concrètement observer, apprendre (EI, pp. 1-A).

Voulant la certitude absolue les positivistes réduisaient tout aux observations perceptuelles. Pour la même raison, les intuitionnistes réduisent tout aux constructions mentales à partir des sensations introspectives temporelles. Le positivisme amène la réjection de grands pans de la physique; l'intuitionnisme aboutit à la réjection de parties importantes des mathématiques. Du reste, la certitude absolue, peut-on l'avoir, où n'est-elle pas plutôt chimérique ? L'expérience historique du développement de la pensée scientifique semble indiquer que nous ne disposons que de certitudes relatives. Une épistémologie conséquente, riche de l'apport des philosophes antérieures, arrive à la même conclusion. Il est dès lors difficile de voir comment on peut s'accommoder dans un cas comme dans l'autre d'une philosophie qui nous fait délaisser des parties considérables de l'acquis scientifique collectif de l'homme. Le "retour" solipsistique au Soi que nous propose Brouwer serait un moyen, mais y en a-t-il d'autres ?

Il y a quelque chose de démesuré dans l'idée qu'un jugement personnel d'un mathématicien génial, ou même d'un courant vigoureux et fertile de pensée mathématique, puisse décider de la faillite, en raison de sa "conscience scientifique tranquille", des théories produites et acceptées collectivement dans le temps et l'espace. Cela frappe d'autant plus que la philosophie intuitionniste tend à placer les mathématiques intuitionnistes au-delà de toute critique. C'est un corollaire de cet idéalisme subjectif que les mathématiques sont indépendantes du langage et de la logique codifiée. Cette idée des mathématiques comme fondement auto-fondé de toute pensée est une thèse dominante dans les écrits de Brouwer des premiers aux derniers. Le langage et la logique (codifiée) ne sont que des ossifications plus ou moins utiles de la vie libre, spontanée et foisonnante de la Conscience. Ils peuvent nous servir mais il ne faut jamais perdre de vue le fond des choses : "... les constructions alinguistiques ou dérivent de l'auto-déroulement (self-unfolding)

de l'intuition de base, sont exactes et vraies, en vertu de leur présence même dans la mémoire, mais la faculté humaine de mémoire qui doit passer en revue ces constructions, est par sa nature limitée et susceptible de faire erreur, même quand elle sollicite le support des signes linguistiques. Donc, pour un esprit humain équipé d'une mémoire illimitée, les mathématiques pures, pratiquées dans la solitude et sans l'emploi des signes linguistiques, seraient exactes, mais l'exactitude serait perdue dans la communication mathématique entre les êtres humains avec une mémoire illimitée, car ils n'auraient d'autres moyens d'entendement que le langage "(VKL. p. 443). La logique n'étant que la codification des structures apparaissant dans le langage, on peut s'attendre à ce qu'elle nous induise aussi en erreur. C'est, en effet, l'avis de Brouwer, du moins pour un principe logique, à savoir, le tiers-exclu. Langage et logique (codifiée) sont en raison de leur nature, viciés; ils peuvent être utiles pour un semblant de communication, mais ils ne peuvent jamais suffire à préserver totalement intacte la richesse et l'exactitude de la pensée solitaire et encore moins de l'épuiser ? Qui pourrait, alors, critiquer ces constructions libres qui en fin de compte ne concernent que moi ? En 1950 Brouwer se résumait comme suit : "... par suite de l'affranchissement total du lest des objets, dont jouissent les mathématiques... leurs plus beaux développements n'auront probablement jamais aucun rapport avec les questions techniques, économiques ou politiques" (DF, p. 503). Sur base de quelle réalité pourrait-on critiquer des constructions si spirituelles ?

Conclusions

Nous avons vu que depuis sa première formulation la philosophie intuitionniste de Brouwer se compose de trois éléments essentiels : l'idéalisme subjectif du type solipsistique, le réductionnisme positivistique, et le constructivisme. Dummett affirme que c'est le seul système encore intact de l'époque héroïque des chercheurs de fondements des mathématiques. Manifestement c'est inexact. Que reste-t-il alors du système de départ ? Pour Heyting, "Seule l'attitude solipsistique... est inessentielle pour sa (Brouwer) fondation des mathématiques"

(B, p. 312). Heyting ampute, donc, très modérément le système en gardant non seulement le réductionnisme mais également l'idéalisme subjectif. Il est vrai que ce dernier est organiquement lié au réductionnisme et que dans la mesure où l'on estime primordiale la possession de la certitude absolue, l'on est poussé à réduire le savoir au contenu immédiat et non-réfléchi de la Conscience. Cependant en raison du caractère radical de cette conception qui amène au rejet des parties généralement reconnues comme valables du savoir collectif humain, et étant donné que la certitude absolue paraît être parfaitement chimérique, il est difficile de voir comment on peut retenir l'idéalisme subjectif et le réductionnisme. Les difficultés que soulève cette sorte de philosophie sont très nombreuses et l'on ne voit pas comment les résoudre en dehors de leur évacuation totale, c'est-à-dire, le solipsisme. On constate que cette philosophie n'a que peu d'adhérents.

Pourtant les travaux intuitionnistes lancés par Brouwer continuent bon train et suscitent un intérêt mathématique et logique réel. A quoi cela peut-il tenir si ce n'est à l'intérêt philosophique et mathématique du constructivisme ? Il me semble clair que même pour Heyting et d'autres intuitionnistes c'est là l'essentiel. Pour Heyting les mathématiques sont des constructions mentales. Troelstra pense de même : "L'objet de l'intuitionnisme pourrait être décrit en premier lieu comme 'la pensée mathématique constructive' " (PI, p. 2) (c'est moi qui souligne). Mental d'accord, mais ce qui compte avant tout c'est que les objets mathématiques soient construits et non pas simplement imposés par la rigueur des lois logiques. Il n'y a aucune nécessité logique, du reste, à ce qu'une construction soit mentale.

Kreisel semble adopter une telle attitude, car il distingue deux aspects de l'intuitionisme de Brouwer (et de Heyting); un aspect négatif qui rejette le réalisme conceptuel (théorie classique des ensembles) et un aspect positif qui met en valeur les notions de construction et de preuve constructive (Kreisel, FIL, p. 198). Se basant sur cette distinction Kreisel s'est appliqué à développer une "théorie abstraite de construction" qui pourrait servir d'interpré-

tion aux systèmes intuitionnistes. Du reste, comme le remarque Dummett, Kreisel rejette l'aspect négatif de l'intuitionnisme pour ne garder que l'aspect positif. C'est placer l'intérêt principal au niveau du constructivisme sans rejeter les "mathématiques classiques".

Dummett ne l'accepte pas: "... mais il reste que, si les mathématiques classiques sont intelligibles, alors, bien que les mathématiques intuitionnistes soient peut-être intelligibles aussi, elles percent largement leur intérêt" (Dummett, EI, p. 361). Pour le sujet créateur solipsiste peut-être, mais pour le reste du monde ce n'est simplement pas vrai. Il ne faut être ni solipsiste ni positiviste subjectif pour voir un grand intérêt à déterminer ce qui peut être effectivement construit en mathématiques et éventuellement ce qui ne le peut pas. Même si l'on est déterminé à rejeter tout ce qui ne peut être construit cela reste vrai. Et puis qu'est-ce que cela veut dire construire? Il faut voir avec quoi et avec quelles méthodes on construit. On peut regarder l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel comme une construction à partir de l'ensemble vide et l'ensemble dénombrablement infini à l'aide de certaines opérations. On peut estimer aussi que le principe d'induction est douteux et n'accepter que des nombres finis. Le constructivisme est, en fait, comme une large gamme spectrale de possibilités graduées selon le point de départ et les moyens que l'on se donne. Ne pourrait-on voir ici un effort de dégager le minimum nécessaire pour telle ou telle théorie à partir d'une théorie mathématique sans préjuger de la valeur de ce qui va au-delà de ce que ce minimum nous permet? Nous avons vu qu'il y a des différences parmi les intuitionnistes et ceux qui sont proches d'eux. N'est-il pas mieux d'y voir simplement différentes possibilités de constructions que de vouloir légiférer et discerner des brevets de bonnes et de mauvaises mathématiques?

Il me semble que la philosophie intuitionniste de Brouwer n'est pas restée intacte, mais que les éléments factices, le solipsisme, le réalisme subjectif et le réductionnisme, sont sujets, en ordre croissant, à un grand nombre d'objections qui rend malaisé leur

rétenion. Toute personne qui accepte une philosophie réaliste des mathématiques ne pourrait les accepter. Par contre, toute personne même celle qui adhère à une philosophie réaliste, peut reconnaître l'intérêt du constructivisme sous une forme ou l'autre. Brouwer était incontestablement un grand mathématicien et logicien. Ses travaux mathématiques et logiques ont eu un grand écho et ils le méritent. Sa pensée philosophique est marquée par la franchise, la vigueur et la sincérité. L'accent qu'il a mis sur l'intuition créative en opposition à un formalisme à outrance et sur le caractère évolutif des mathématiques et de la logique sont sans aucun doute salutaires. Mais son insistance sur le subjectivisme et le constructivisme à outrance ne le sont pas. On peut comprendre qu'un certain tempérament psychologique porté vers le subjectivisme soit propice à une philosophie constructiviste, mais on ne peut admettre que les deux soient indissolublement liées de telle façon que reconnaître une valeur au deuxième nécessite la reconnaissance du premier. Il est toujours navrant de voir une intuition profonde portant sur une réalité quelconque, les mathématiques par exemple, qui permet d'éclaircir cette réalité s'ériger en un mur intransigeant qui veut interdire tout passage. Les philosophies rivales de celle de Brouwer sont aussi intactes qu'elle; ou plutôt la sienne est aussi peu intacte que celles-là. Les retombées philosophiques et mathématiques de toutes subsistent. bien que libérées, du moins on peut l'espérer, des limites étroites de leur première définition. En ce qui concerne l'intuitionnisme, ce qui semble vigoureux et important aujourd'hui ce sont des mathématiques constructives et les systèmes formels associés plutôt que le solipsisme, l'idéalisme subjectif ou le réductionnisme positiviste.

Références

Dans le texte chaque référence est faite en donnant le nom de l'auteur suivi du sigle pour l'écrit sauf pour les écrits de Brouwer et les cas clairs où le nom n'est pas donné.

Brouwer, L.E.J.

(CW) L.E.J. Brouwer, Collected Works, ed. par A. Heyting, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1975, vol. I, Philosophy and Foundations of Mathematics

(CPM) Consciousness, Philosophy and Mathematics, in (CW).
pp. 480 -494

(DF) Discours final, in (CW), p. 503

(HBPM) Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism, in (CW) , pp. 508-515.

(LAM) Life, Art and Mysticism, in (CW), pp. 1-10.

(FM) On the Foundations of Mathematics, in (CW), pp. 13-101.

(MWS) Mathematik, Wissenschaft und Sprache, in (CW), pp. 417-428

(VKL) Volition, Knowledge, Language, in (CW), pp. 443-446.

Carttett, Michael

(EI) Elements of Intuition, Oxford; Clarendon Press. 1978

Frankel, A.A., Y. Bar-Hillel, A. Levy

(FST) Foundations of Set Theory , Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1973.

Heyting, A.

(I) Intuitionism : an Introduction, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1972

(B) L.E.J. Brouwer, in Klibansky, R. (ed), La Philosophie Contemporaine, Vol. I, Logique et Fondements des Mathématiques, Firenze : La Nuova Italia Editrice, 1968, pp. 308-315.

Kreisel, G.

(FIL) Foundations of Intuitionistic Logic, in Nagel, E.,
P. Suppes, A. Tarski (eds.) Logic, Methodology and
Philosophy of Science, Stanford : Stanford University
Press, 1962, pp. 198-210

Troelstra, A.

(PI) Principles of Intuitionism, Berlin : Springer, 1969.