

NORMALISATION DU CALCUL DES FONCTIONNELLES RECURSIVES PRIMITIVES

Marcel Crabbé

Nous renvoyons à l'article de Th. Lucas : "L'interprétation Dialectica" pour la justification de ce qui suit. Pour des raisons techniques, il nous a semblé nécessaire de présenter le système T indépendamment de la manière dont cela fut fait dans l'article cité. En annexe, nous indiquons brièvement comment on peut raccorder les deux formulations.

Référence. TAIT, Intensional interpretations of functionals of finite type. J.S.L. 32 (1967), pp. 198-212.

1. Types

Les types sont les éléments de la plus petite classe qui comprend 0 et est fermée pour l'opérateur $(\sigma \rightarrow \tau)$.

Remarques

- Le type 0 est le type des nombres naturels. Le type $(\sigma \rightarrow \tau)$ est le type des fonctionnelles calculables définies sur les fonctionnelles de type σ et dont la valeur est une fonctionnelle de type τ .
- Tout type est de la forme $(\sigma_1 \rightarrow \dots (\sigma_n \rightarrow 0) \dots)$ ($n \geq 0$)
- Le type $(\sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow (\sigma_n \rightarrow \tau) \dots)$ pourra être noté $\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow \tau$.

2. Termes

Pour chaque type σ on se donne une suite infinie de variables $v_1^\sigma, v_2^\sigma, \dots$ de type σ .

On dispose également de deux constantes : 0 et Set, pour chaque type σ , d'une constante R_σ .

Si f est un terme et σ un type, la notation $f \models \sigma$ signifiera que f est de type σ .

Règles de formation des termes

1. Toute variable de type σ est un terme de type σ .
2. 0, S et R_σ sont des termes de types α , $(\alpha \rightarrow \alpha)$ et σ , $(\alpha \rightarrow (\sigma \rightarrow \sigma))$, $\alpha \rightarrow \sigma$ respectivement.
3. Si $f \models \tau$ et $x \models \sigma$ alors $\lambda x f \models (\sigma \rightarrow \tau)$ (abstraction)
4. Si $f \models (\sigma \rightarrow \tau)$ et $g \models \sigma$ alors $(fg) \models \tau$ (évaluation).

Remarques

- Le terme $\lambda x_1^{\sigma_1} \dots \lambda x_n^{\sigma_n} f$ de type $\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow \tau$ se note aussi $\lambda x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f$.
- Le terme $(\dots (f g_1) \dots g_n)$ se note aussi $fg_1 \dots g_n$.
- On peut omettre les parenthèses extérieures.
- Tout terme est de la forme $\lambda x_1 \dots x_n. (fg_1 \dots g_m)$ où $n, m \geq 0$ et f est une constante, une variable ou un terme de la forme $\lambda y f'$.

Substitution, occurrences libres et liées

- Une occurrence de la variable x dans le terme f est liée si elle se trouve dans ^{un} sous-terme de f de la forme $\lambda x g$. Elle est libre sinon.

Une occurrence libre de la variable x dans f est libre pour g ssi elle ne se trouve pas dans un sous-terme de f de la forme $\lambda y h$ où y a une occurrence libre dans g .

Si le type de g_i ($1 \leq i \leq n$) est le même que celui de x_i , alors $f [g_1/x_1, \dots, g_n/x_n]$ est le résultat de la substitution de g_i aux occurrences libres de x_i dans f ($1 \leq i \leq n$). Toutefois, ceci ne présente un intérêt que si chaque occurrence libre de x_i dans f est libre pour g_i . Nous supposons qu'il en est toujours ainsi.

Plus formellement nous pouvons introduire une relation d'équivalence $\asymp$ entre termes en postulant $f \asymp g$ ssi " g ne diffère de f que par les variables liées". Si $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont les classes d'équivalence de

f et g et si x est libre pour g dans f alors $\overline{f} \ [\overline{g}/x]$ est $\overline{f[\overline{g}/x]}$

Les considérations qui suivent se rapportent non aux termes eux-mêmes, mais à leurs classes d'équivalence.

En fait, la méthode que nous venons d'esquisser revient à présenter le système à l'aide des carrés de Bourbaki.

On peut également éliminer les variables liées en utilisant des combinateurs, comme chez Tait, mais ceci modifie en même temps la structure du système.

3. La réduction

$f \triangleright g$ (" f se réduit à g ") est la relation transitive, stable pour les opérations d'abstraction et d'évaluation engendrée par

$$R1. (\lambda x f)g \triangleright f \ [g/x]$$

$$R2. R \ f \ g \cup \triangleright f$$

$$R3. R \ f \ g \ (St) \triangleright gt \ (R \ f \ g \ t)$$

On vérifie sans peine que :

- $f \triangleright g$ et $f \models \sigma$ impliquent $g \models \sigma$
- si f est un terme et $f \triangleright g$ alors g est un terme.

Définitions

f se réduit immédiatement à g si on a $f \triangleright g$ sans utiliser la transitivité de $\triangleright$. (Plus précisément : si g s'obtient en remplaçant dans f une occurrence d'un sous-terme ayant une des formes indiquées à gauche de $\triangleright$ dans les règles $R1$, $R2$ et $R3$ par le terme correspondant mentionné à droite).

Une réduction de f est une suite de termes dont le premier terme est f et dans laquelle chaque autre terme est obtenu par réduction immédiate du précédent.

Un terme f est normal ssi il n'y a pas de terme g tel que $f \triangleright g$ (Toute réduction de f est de longueur 1)

Exemples

- $R \ 0 (\lambda x y.x) (S0)$ se réduit immédiatement à $(\lambda x y.x) \ 0 (R \ 0 (\lambda x y.x) \ 0)$.
- Les suites :
 $R \ 0 (\lambda x y.x) (S0), (\lambda x y.x) \ 0 (R \ 0 (\lambda x y.x) \ 0), (\lambda x y.x) \ 00,$
 $(\lambda y \ 0) \ 0, 0.$
 et
 $R \ 0 (\lambda x y.x) \ S0, (\lambda x y.x) \ 0 (R \ 0 (\lambda x y.x) \ 0),$
 $(\lambda y \ 0)(R \ 0 (\lambda x y.x) \ 0), 0.$
 sont des réductions de $R \ 0 (\lambda x y.x) (S0)$
- Les termes $\lambda xx, \lambda y 0, 0, S0$ et $R0(\lambda x y.x) \ z$ sont normaux.

Le théorème suivant se démontre d'une manière finitiste :

Théorème de Church-Rosser

Si $f \triangleright g_1$ et $f \triangleright g_2$ et $g_1 \neq g_2$ alors il existe un terme h tel que $g_1 \triangleright h$ et $g_2 \triangleright h$

Corollaire

Un terme ne se réduit qu'à un terme normal au plus.

4. NumérauxDéfinition :

Les numéraux sont les termes de la plus petite classe contenant 0 et $S \ t$ pour tout t dans la classe.

Le numéral $(S \dots (S0) \dots)$ où S a n occurrences est noté $S^n 0$ ou $\overline{n}$ ($S^0 0 = 0$). Tous les numéraux sont de cette forme.

Lemme 1

Tout terme normal fermé de type 0 (c.à.d. sans occurrences libres de variables) est un numéral (et réciproquement).

Démonstration

La réciproque est évidente.

L'autre partie se démontre par induction sur la longueur du terme.

Soit $t : \lambda x_1 \dots x_n. (f \ g_1 \dots g_n)$ un terme normal fermé de type 0.

Comme t est de type 0, $n = 0$. En outre f est une constante, car t est fermé.

Trois cas sont à envisager.

1. f est 0. Alors t est f .
2. f est S. Alors g_1 est fermé et de type 0, et $m = 1$
 Par l'hypothèse d'induction g_1 est $S^k \ 0$ pour un certain naturel k . Donc t est $S^{k+1} \ 0$.
3. f est R_σ . Alors $g_1 \models \sigma$, $g_2 \models 0 \rightarrow (\sigma \rightarrow \sigma)$ et $g_3 \models 0$. Par l'hypothèse d'induction g_3 est un numéral. Dès lors t n'est pas normal. Ce cas est impossible. □

5. Théorème de normalisation

Le théorème de normalisation s'énonce :

Tout terme se réduit à un terme normal. (Pour tout terme il y a une réduction finie).

En vertu du lemme 1, il a comme corollaire que tout terme fermé de type 0 se réduit à un numéral. L'intérêt de ce corollaire réside dans le fait qu'il implique élémentairement la cohérence de l'arithmétique (intuitionniste ou classique).

Il s'ensuit que le théorème de normalisation ne peut-être démontré dans l'arithmétique. Howard a montré qu'on peut l'établir dans une extension de l'arithmétique primitive récursive obtenue par addition du schéma d'induction jusqu'à l'ordinal ε_0 (premier point fixe de la fonction $\alpha \mapsto \omega^\alpha$). Ce résultat montre que la preuve de la cohérence de l'arithmétique via l'interprétation de Gödel transgresse le point de vue finitiste de la même manière que la fameuse démonstration de Gentzen.

Nous présentons ici une démonstration d'un théorème plus fort que le théorème de normalisation.

Théorème de normalisation forte :

Toute réduction d'un terme est finie.

L'idée directrice de cette démonstration, due à Tait, est de concevoir les termes comme des notations pour les fonctionnelles calculables (rékursives primitives) au sens de Gödel.

Cette interprétation est clarifiée dans les définitions qui suivent :

Définition

Un terme est absolument normalisable ssi toutes ses réductions sont finies.

Notion de calculabilité (Gödel-Tait)

La calculabilité des termes est définie par récurrence sur la complexité des types.

Si $f \models 0$, f est calculable ssi f est absolument normalisable.

Si $f \models \sigma \rightarrow \tau$, f est calculable ssi pour tout terme g de type σ , fg est calculable (notez que $fg \models \tau$).

Remarque

On peut remplacer la définition qui vient d'être donnée par la suivante :

Si $f \models \sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow 0$, alors f est calculable ssi pour tous termes calculables $g_1, \dots, g_n$ ($g_i \models \sigma_i$ ($1 \leq i \leq n$)) $f g_1 \dots g_n$ est absolument normalisable.

Lemme 2

1. Toute variable est calculable.
2. Tout terme calculable est absolument normalisable.

On démontre simultanément les deux points par induction sur la complexité des types. Le cas du type 0 est immédiat.

1. Soient x une variable de type $\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow 0$ et $g_1, \dots, g_n$ des termes calculables de types respectifs $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Par l'hypothèse de récurrence les termes g_i ($1 \leq i \leq n$) sont absolument normalisables. Donc, $x g_1 \dots g_n$ est absolument normalisable.
2. Soit f un terme calculable de type $\sigma_1, \dots, \sigma_n \rightarrow 0$. Par l'hypothèse de récurrence, les variables $x_1, \dots, x_n$ de types respectifs $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont calculables. Donc, $f x_1 \dots x_n$ est absolument normalisable. Par conséquent f l'est également. $\square$

On définit un concept de réduction "critique" (noté $\triangleright_c$) en postulant :

- $$\begin{aligned}
 (\lambda x f) g &\triangleright_c f [g/x] && , \text{ si } g \text{ est absolument normalisable lorsque } x \text{ n'a pas d'occurrences libres dans } f; \\
 R f g t &\triangleright_c f && , \text{ si } t \text{ et } g \text{ sont absolument normalisables et } t \triangleright o. \\
 R f g t &\triangleright_c g t' (R f g t') && , \text{ si toute réduction de } t \text{ comprend un terme de la forme } St^* \text{ et } t \triangleright St'.
 \end{aligned}$$

Un terme critique est un terme de la forme indiquée ci-dessus à gauche de $\triangleright_c$ et vérifiant les conditions de la règle de réduction critique correspondante.

Lemme 3

Si r est un terme critique et si pour tout terme s tel que $r \triangleright_c s$, s est calculable, alors r est calculable.

Démonstration

On envisage chacune des trois réductions critiques.

Soient $h_1 \dots h_m$ des termes calculables tels que $R f g t h_1 \dots h_m$ soit de type $\bar{o}$. Toute réduction de $R f g t h_1 \dots h_m$ contient deux termes successifs de la forme : $R f'g' (St') h'_1 \dots h'_m, g' t' (R f'g't')$ $h'_1 \dots h'_m$.

D'autre part, $R f g t \triangleright_{\mathcal{C}} g t' (R f g t')$, qui est calculable par hypothèse.

Il suffit donc, pour terminer, de remarquer que $g t' (R f g t')$ $h_1 \dots h_m \triangleright g't' (R f'g't') h'_1 \dots h'_m$.

Calculabilité sous substitution

Un terme f est calculable sous substitution ssi pour tous termes calculables $h_1, \dots, h_n$, $f [h_1/x_1, \dots, h_n/x_n]$ est calculable.

Pour un terme fermé la calculabilité sous substitution coïncide donc avec la calculabilité.

Théorème

Tout terme est calculable sous substitution.

Démonstration

Par induction sur la structure des termes.

1. O est calculable.

2. S est calculable.

3. R_{σ} est calculable:

Soient f et g deux termes calculables de type σ et $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \sigma)$ respectivement.

Un terme calculable de type σ se réduit à un unique terme normal St' ou t' n'est pas de la forme St' .

Nous montrons par induction sur k que, pour tout terme t calculable de type σ , $R f g t$ est calculable.

1. $k = 0$ On distingue deux cas.

11 $t^* \equiv 0$. Alors $R f g t \supseteq_c f$, qui est calculable.

Donc $R f g t$ est calculable (lemme 3).

12 $t^* \neq 0$.

Soient $h_1, \dots, h_m$ des termes calculables tels que $R f g t h_1 \dots h_m$ soit de type 0. Tout terme apparaissant dans une réduction de $R f g t h_1 \dots h_m$ est de la forme $R f' g' t' h'_1 \dots h'_m$ où $f \supseteq f'$, $g \supseteq g'$, $h'_1 \supseteq h_1, \dots, h'_m \supseteq h_m$. Une telle réduction est nécessairement finie.

2. $k = p + 1$

Soit t' un terme tel que $t \supseteq St'$. Alors $R f g t \supseteq_c g t' (R f g t')$ qui est calculable par l'hypothèse d'induction ($t' \supseteq S^p t^*$).

Donc, par le lemme 4, $R f g t$ est calculable.

4. Toute variable est calculable sous substitution.

5. Si f est calculable sous substitution, alors $\lambda x f$ l'est aussi.

En effet, si $h_1, \dots, h_m, g$ sont calculables, alors $\lambda x f [h_1/x_1, \dots, h_m/x_m] g \supseteq_c f[g/x, h_1/x_1, \dots, h_m/x_m]$ qui est calculable, par hypothèse. On applique alors le lemme 3.

6. Si f et g sont calculables sous substitution, alors il en va de même pour $f g$.

Corollaires

1. Tout terme est calculable.

2. Tout terme est absolument normalisable.

3. Tout terme fermé de type 0 se réduit à un numéral.

6. Annexe

Nous relierons ici l'exposé précédent à "L'Interprétation Dialectica" de T. Lucas.

On montre facilement que pour toute fonction primitive réursive φ de $\mathbb{N}^n$ vers $\mathbb{N}$ il existe un terme $\bar{\varphi}$ de T ayant le type 0, ..., 0 $\rightarrow$ 0 tel que pour toute suite de naturels $k_1, \dots, k_n$, $\bar{\varphi} \bar{k}_1 \dots \bar{k}_n \triangleright \overline{\varphi(k_1, \dots, k_n)}$.

En particulier, considérons les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} P &=_{\text{def}} R0 (\lambda x y. x) & ; & \quad \bar{\lambda} =_{\text{def}} \lambda x y. R x (\lambda z S) y ; \\ \bar{\perp} &=_{\text{def}} \lambda x y. R x (\lambda z P) y & ; & \quad E =_{\text{def}} \lambda x y. \bar{\lambda} (\bar{\perp} x y) (\bar{\perp} y x) ; \\ \bar{\neg} &=_{\text{def}} \lambda x \bar{\perp} (S0) x & ; & \quad \bar{\supset} =_{\text{def}} \lambda x y. \bar{\neg} (\bar{\lambda} x (\bar{\neg} y)) \\ \bar{\vee} &=_{\text{def}} \bar{\neg} (\bar{\lambda} (\bar{\neg} x) (\bar{\neg} y)) . \end{aligned}$$

On remarquera que

$$\begin{aligned} P 0 \triangleright 0 & ; \quad P \overline{n+1} \triangleright \bar{n} & ; & \quad \bar{\lambda} \bar{n} \bar{m} \triangleright \overline{n+m} ; \\ \bar{\perp} \bar{n} \bar{m} \triangleright \overline{n \perp m} . \end{aligned}$$

Dès lors, si f et g sont des termes clos de type 0 (se réduisant à un numéral, par le théorème de normalisation), on a :

$$\begin{aligned} E f g \triangleright 0 & \text{ ssi } f \text{ et } g \text{ se réduisent au même numéral;} \\ \bar{\lambda} f g \triangleright 0 & \text{ ssi } f \triangleright 0 \text{ et } g \triangleright 0; \\ \bar{\neg} f \triangleright 0 & \text{ ssi } f \not\triangleright 0 ; \\ \bar{\supset} f g \triangleright 0 & \text{ ssi } f \not\triangleright 0 \text{ ou } g \triangleright 0; \\ \bar{\vee} f g \triangleright 0 & \text{ ssi } f \triangleright 0 \text{ ou } g \triangleright 0. \end{aligned}$$

On peut dès lors représenter toute 0-formule $\psi(x_1, \dots, x_n)$ de LF par un terme $\bar{\psi}$ de telle sorte que pour tous termes fermés $t_1, \dots, t_n$ de type 0 :

$$\models \psi(t_1, \dots, t_n) \quad \text{ssi} \quad \bar{\psi} \bar{t}_1 \dots \bar{t}_n \triangleright 0.$$

Appelons "terme général" toute expression métalinguistique de la forme $\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_m f(\vec{z})$ où f est un terme de T de type 0 et $\vec{z}$ indique les occurrences libres de variables autres que $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$.

L'interprétation *Dialectica* peut-être considérée comme associant à chaque formule $\varphi(\vec{z})$ de l'arithmétique intuitionniste un terme général $\exists \vec{x} \forall \vec{y} \varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de sorte que

si $H A \vdash \varphi(\vec{z})$, alors on peut construire une suite $\vec{f}$ ($f_1, \dots, f_n$) de termes de T telle que pour toutes les suites $\vec{g}$ et $\vec{h}$ de termes de T $\varphi(\vec{f} \vec{h}, \vec{g}, \vec{h}) \triangleright 0$ ($\vec{f} \vec{h}$ est la suite $f_1 \vec{h}, \dots, f_n \vec{h}$).

Cela montre la consistance de $H A$ (et aussi de PA , via l'interprétation de l'arithmétique classique dans l'intuitionniste) puisque $HA \vdash 0 = 1$ entraînerait $E O(SO) \triangleright 0$, ce qui est faux car $E O(SO) \triangleright SO$.